Électromagnétisme Partie I : Électrostatique et Magnétostatique
Chapitre 1 : Distributions de charge

31 mars 2026

Dans cette première partie d'électromagnétisme nous allons nous intéresser aux champs *statiques* $\vec{E}$ et $\vec{B}$, créés par des charges et des courants, en l'absence de mouvement. Dans cette partie on considérera pour le calcul des champs que les charges sont au repos, sans mouvement.

Dans ce premier chapitre nous allons introduire les différentes distributions de charges possibles et sur le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle. On utilisera souvent l'analogie entre le champ électrique $\vec{E}$ et le champ gravitationnel $\vec{g}$.

1 Charge ponctuelle : Loi de Coulomb

Vous avez vu et utilisé l'année dernière la loi de gravitation de Newton donnant la force qui s'exerce entre deux masses m_1 et m_2. Nous allons utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) le reprèe étant centré sur la masse m_1.

$$\vec{F}_{g1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r \tag{1}$$

$\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial en coordonnées cylindriques et G la constante gravitationnelle. Cette force est **toujours attractive**. On peut mettre cette force sous la forme

$$\vec{F}_{g1\to 2} = m_2\vec{g}_1 \tag{2}$$

avec

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r \tag{3}$$

le *champ gravitationnel* créé par la masse m_1.

Il existe une loi similaire à la loi de gravitation de Newton, qui décrit cette fois l'interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2.

De même que précédemment on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z), le repère étant centré sur la charge q_1 Cette loi est la **loi de Coulomb**

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \tag{4}$$

où on a introduit ε_0 la permittivité du vide, $\varepsilon_0 = 8{,}9\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ (pas à connaître). Au contraire de la loi de gravitation, le sens de cette force dépend du signe relatif des charges.

La loi de Coulomb montre que

- Deux charges de signe opposés s'attirent
- Deux charges de même signe se repoussent

De la même manière que précédemment on peut réécrire cette force

$$\vec{F}_{1\to 2} = q_2\vec{E}_1 \tag{5}$$

avec

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \tag{6}$$

le champ électrostatique créé par la charge ponctuelle q_1.

Remarque : l'unité de la charge est le Coulomb C et l'unité du champ électrique $\vec{E}$ est le V/m.

En résumé :

- Une charge q plongé dans le champ électrique **extérieur** $\vec{E}$ subit une force

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{7}$$

- Une charge ponctuelle q au repos crée le champ électrostatique

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \tag{8}$$

Remarque : Une charge ne subit pas l'influence du champ électrique qu'elle créée.

Exemple : On considère un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et constant $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$. On place une charge q de masse m à l'origine du repère, sans vitesse initiale. On note x l'abscisse de la particule à un temps t La seconde loi de Newton projetée sur l'axe x donne

$$m\ddot{x}(t) = qE_0 \implies \dot{x}(t) = \frac{qE_0}{m}t + A \implies x(t) = \frac{qE_0}{2m}t^2 + At + B \tag{9}$$

On utilise les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ ainsi $B = 0$ et $A = 0$ d'où

$$x(t) = \frac{qE_0}{2m}t^2 \tag{10}$$

Remarque : on vient de traiter un exemple très proche de la chute libre donnée. Supposons que l'on a une masse m placée à l'origine du repère, sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ uniforme, on a alors

$$m\ddot{x} = -mg \implies \ddot{x} = -g \implies x = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{11}$$

2 Lignes de champ

Pour représenter le champ de vitesse $\vec{v}$ en mécanique des fluides on utilisant les lignes de courant, pour représenter le champ électrique $\vec{E}$ on va utiliser les lignes de champ. Une ligne de champ est tangente en tout point au champ électrique $\vec{E}$ et est orientée dans son sens. Pour le cas d'une charge ponctuelle des lignes de champ sont représentées en figure 1. Le

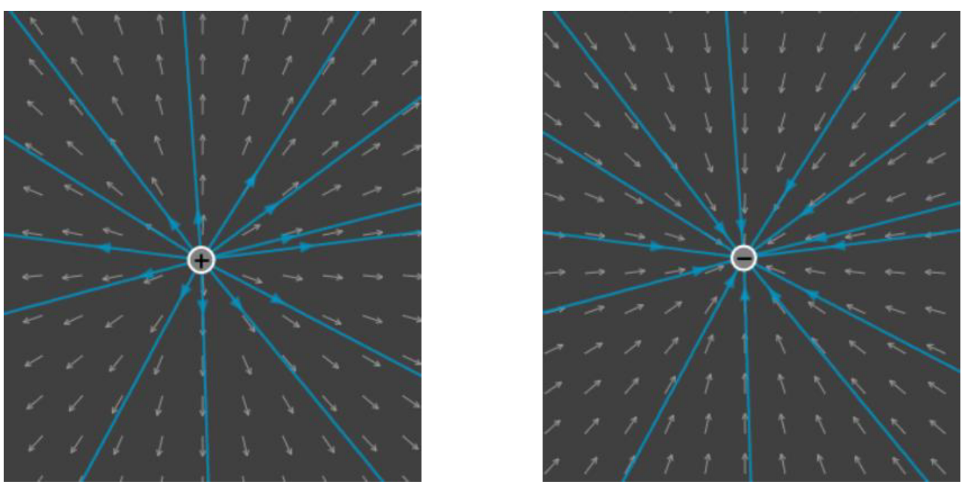

FIGURE 1 – Lignes de champ pour les champs électriques créés par des charges ponctuelles positive et négative.

champ électrique est radial donc les lignes de champ sont rectilignes. Pour une charge positive le champ est orienté selon $+\vec{u}_r$ et pour une charge négative vers $-\vec{u}_r$, ce que l'on retrouve bien sur la carte des lignes de champ.

On définit $\vec{dl}$ le vecteur unitaire tangent en tout point à la ligne de champ. L'équation de la ligne de champ est alors

$$\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0} \tag{12}$$

Résolvons cette équation dans le cas de notre champ électrique créé par une charge ponctuelle. En coordonnées cylindriques $\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$ On réécrit notre équation de ligne de champ :

$$E_0\vec{u}_r \wedge (\mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z) = -\mathrm{d}zE_0\vec{u}_\theta + E_0r\mathrm{d}\theta\vec{u}_z = \vec{0} \tag{13}$$

d'où

$$E_0\mathrm{d}z = 0 \quad ; \quad E_0r\mathrm{d}\theta = 0 \implies \mathrm{d}z = 0 \quad ; \quad \mathrm{d}\theta = 0 \tag{14}$$

Ainsi $\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{u}_r$: on retrouve bien des lignes de champ radiales !

3 Théorème de superposition

On sait maintenant calculer le champ créé par une charge ponctuelle. Lorsqu'il y a plusieurs charges ponctuelles on peut utiliser le *théorème de superposition* :

> Le champ électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles est égal à la somme des champ électrostatiques créés par les différentes charges qui composent la distribution.

Un exemple de lignes de champ correspondant à une distribution de charges ponctuelles est donné figure 2.

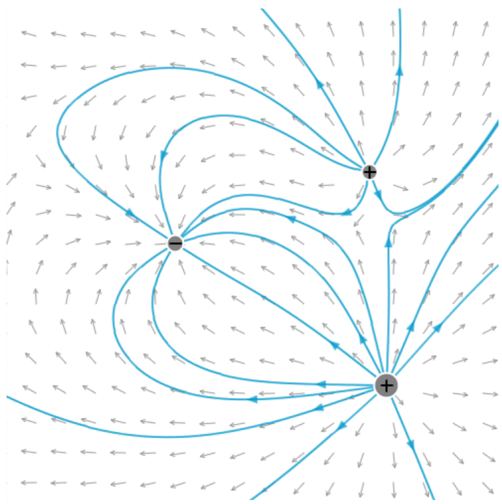

FIGURE 2 – Lignes de champ en présence de plusieurs charges ponctuelles

On remarque que

- Les lignes de champ ne sont plus rectilignes.
- Les lignes de champ partent des charges positives et vont vers les charges négatives.
- Dans le voisinage d'une charge les lignes de champ sont rectilignes car l'influence des autres charge est alors négligeable.

4 Distribution continue de charge

Vous avez d'abord décrit les systèmes mécaniques à l'aide de masses ponctuelles puis vous avez vu la mécanique du solide et des fluides où l'on a introduit la masse volumique qui permet de décrire une distribution continue de masse. De même, nous allons introduire la *densité volumique de charge* que l'on notera $\rho(M)$ pour un point M, définie par

$$\rho(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{15}$$

avec $\mathrm{d}q$ la charge contenue dans le volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ entourant le point M. ρ est ainsi en $\mathrm{C/m^3}$. On peut calculer la charge totale Q d'un objet de volume V par

$$Q = \iiint_V \rho \mathrm{d}V \tag{16}$$

Si la densité volumique de charge est uniforme alors $Q = \rho V$.

Exemples :

- Charge contenue dans une sphère de rayon R de densité volumique de charge uniforme ρ :

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{17}$$

- Charge contenue dans un cylindre de rayon R de hauteur h

$$Q = \pi R^2 h \rho \tag{18}$$

Parfois, notamment dans le cas des métaux, les charges se répartissent sur la surface du conducteur et non dans le volume. Dans ce cas là on utilise la *densité surfacique de charge* $\sigma(M)$ pour un point M, définie par

$$\sigma(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{19}$$

où $\mathrm{d}q$ est la charge contenue dans la surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ entourant M. σ est ainsi en $\mathrm{C/m^2}$. On peut calculer la charge totale d'un objet de surface S par

$$Q = \iint_S \sigma \mathrm{d}S \tag{20}$$

Si la densité surfacique de charge est uniforme alors $Q = \sigma S$.

Exemples :

- Charge contenue sur un disque de rayon R de densité surfacique de charge σ uniforme

$$Q = \pi R^2 \sigma \tag{21}$$

- Charge contenue dans une sphère de rayon R chargée en surface, de densité surfacique de charge σ uniforme

$$Q = 4\pi R^2 \sigma \tag{22}$$

- Charge contenue dans un cylindre de rayon R de hauteur h chargé sur sa surface latérale, de densité surfacique de charge σ uniforme

$$Q = \pi R^2 h \sigma \tag{23}$$

Enfin, dans le cas d'un objet quasi-unidimensionnel, un fil par exemple, on peut utiliser la *densité linéique de charge* $\lambda(M)$ pour un point M, définie par

$$\lambda(M) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \tag{24}$$

où $\mathrm{d}q$ est la charge contenue dans le segment infinitésimal $\mathrm{d}l$ autour du point M, λ est ainsi en C/m. La charge totale d'un objet de longueur L est alors

$$Q = \int_L \lambda \mathrm{d}l \tag{25}$$

Si la densité linéique de charge est uniforme alors $Q = \lambda L$.