

Électromagnétisme Partie II : Équations de Maxwell et Ondes Électromagnétiques

Chapitre 3 : Réflexion et onde stationnaire

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la réflexion d'une onde sur un métal parfait et sur la notion d'onde stationnaire qui en découle.

1 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait

On peut se représenter le modèle du métal parfait comme celui d'un miroir parfait. Le modèle du métal parfait stipule que le champ électrique est **nul** à l'intérieur du métal.

On considère la situation schématisée sur la figure 1. On considère une OPPH \vec{E}_i , polarisée selon \vec{u}_y se déplaçant vers les x croissants. Cette onde se réfléchit sur le métal en $x = 0$ et produit ainsi une onde réfléchie \vec{E}_r .

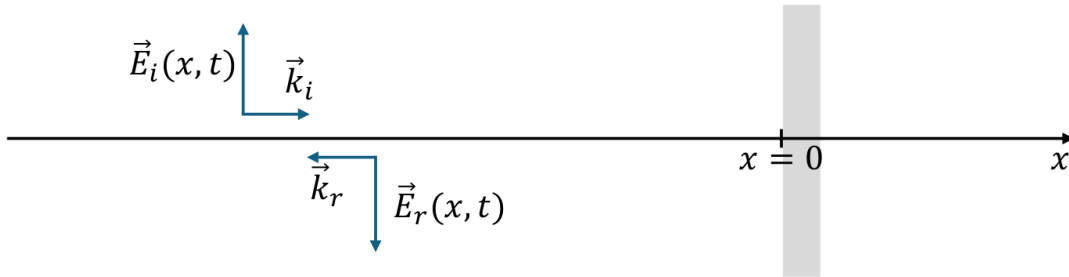


FIGURE 1 – Réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait placé en $x = 0$.

1.1 Calcul du champ réfléchi

On note r le coefficient de réflexion en amplitude, de telle sorte que les expressions des champs sont

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{E}_r = r E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y \quad (1)$$

en effet l'onde réfléchie se déplace vers les x croissants ($\vec{k}_r = -k\vec{u}_x$). Pour $x < 0$, le champ électrique total est $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

La relation de passage (pas à connaître) nous dit que la composante tangentielle du champ électrique est toujours continue à une interface. Ici le champ est bien tangentiel à l'interface métal-air (selon \vec{u}_y) donc le champ est continu en $x = 0$. Appliquons cette condition

$$\vec{E}(x = 0^-) = \vec{E}(x = 0^+) \implies E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y + r E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y = \vec{0} \quad (2)$$

cette relation est vraie quelque soit t ainsi

$$1 + r = 0 \implies r = -1 \quad (3)$$

On a ainsi

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{u}_y \quad (4)$$

l'onde est entièrement réfléchie et subit un déphasage de π lors de la réflexion sur le métal parfait.

1.2 Champ total et onde stationnaire

Le champ électrique total est donc

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y = E_0 \vec{u}_y (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \quad (5)$$

En utilisant les formules de trigonométrie adaptées

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{u}_y (\cos(\omega t) \cos(kx) + \sin(\omega t) \sin(kx) - (\cos(\omega t) \cos(kx) - \sin(\omega t) \sin(kx))) \quad (6)$$

Finalement on trouve

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \quad (7)$$

Les variables de temps et d'espace sont **découplées**, elles ne sont plus dans la même fonction ! L'onde n'est plus propagative, elle est dite **stationnaire**. La forme générale d'une onde stationnaire est

$$f(x, t) = \chi(x) \phi(t) \quad (8)$$

Comme son nom l'indique une onde stationnaire ne se déplace pas, il y a des points de l'espace où l'onde est toujours nulle, ce sont les **nœuds** et d'autres où elle est maximale (ou minimale), ce sont les **ventres** (voir figure 2). Cherchons les positions de ces points particuliers.

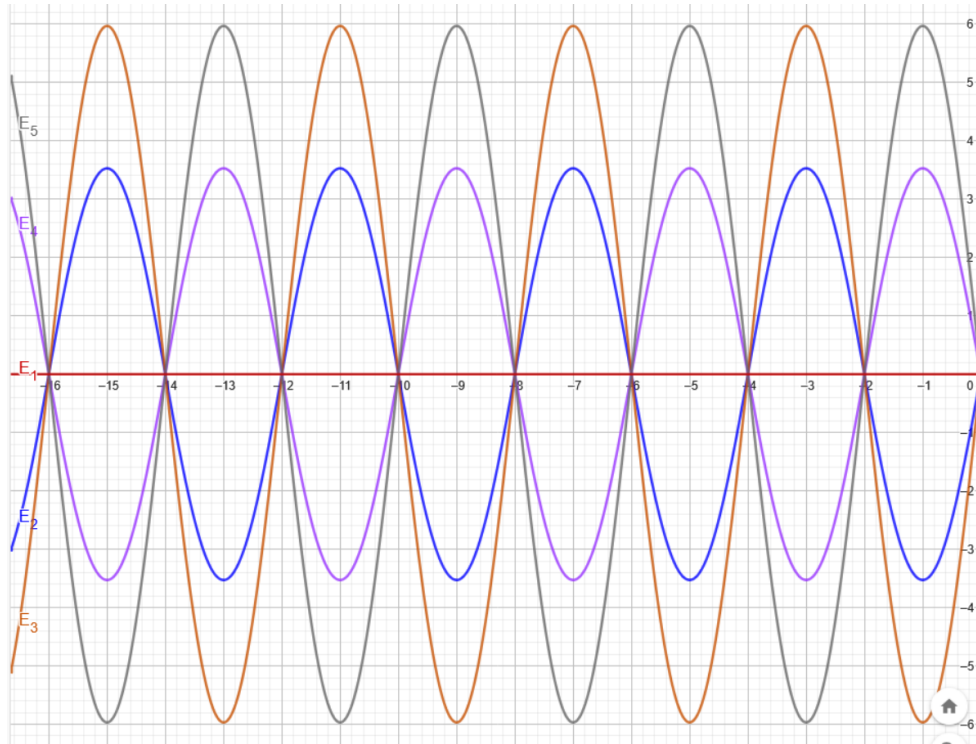


FIGURE 2 – Représentation d'une onde stationnaire à différents instants.

- Pour les nœuds : le champ \vec{E} est nul aux points tels que

$$\sin kx = 0 \implies kx = n\pi \implies x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (9)$$

où n est un entier, λ la longueur d'onde de l'onde. Les x_n sont donc les positions des nœuds de l'onde stationnaire.

- Pour les ventres : le champ est maximal aux points tels que

$$\sin kx = \pm 1 \implies kx = \frac{\pi}{2} + p\pi \implies x_p = \frac{\lambda}{4} + \frac{p\lambda}{2} \quad (10)$$

où p est un entier. Les x_p sont les positions des ventres de l'onde stationnaire.

- Il y a donc une distance de $\lambda/2$ entre deux ventres ou deux nœuds consécutifs, et une distance de $\lambda/4$ entre un ventre et un nœud consécutifs. L'expérience permet ainsi la mesure de la longueur d'onde λ .

2 Confinement et mode d'onde stationnaire

Ici la solution en onde stationnaire est apparue lors de l'ajout d'une paroi en $x = 0$. Si on *confine* l'onde dans une cavité, entre deux parois modélisées par un métal parfait, cela va contraindre la forme de l'onde stationnaire et des *modes* vont apparaître. Cette situation est analogue à beaucoup de situations dont certaines en dehors de l'électromagnétisme, par exemple le confinement d'ondes sonores dans les instruments à vent.

On considère ainsi une cavité de longueur L comme schématisé sur la figure 3.

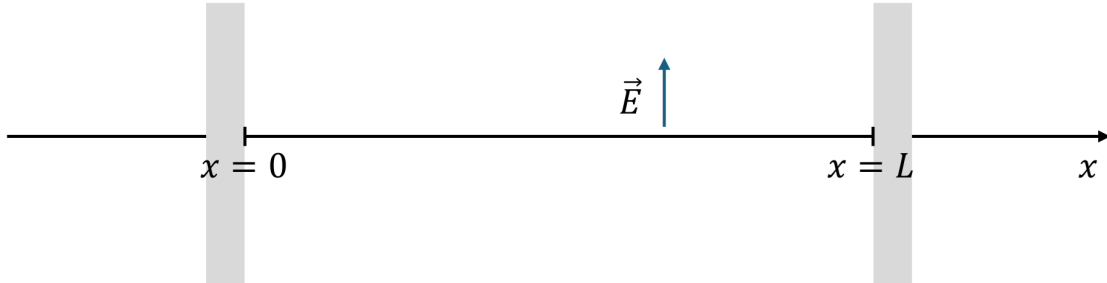


FIGURE 3 – Schéma d'une cavité unidimensionnelle, de longueur L , les interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont modélisées par un métal parfait.

On cherche l'expression du champ électrique \vec{E} (qu'on suppose polarisé selon \vec{u}_y à l'intérieur de la paroi. Les parois sont modélisées par un métal parfait, des nœuds sont donc imposés en $x = 0$ et $x = L$

$$\vec{E}(x = 0) = \vec{E}(x = L) = \vec{0} \quad (11)$$

On cherche une solution sous la forme d'une onde stationnaire

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \quad (12)$$

cette solution respecte bien la condition en $x = 0$. Appliquons la condition en $x = L$

$$\vec{E}(L, t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(kL) \vec{u}_y = \vec{0} \quad (13)$$

Cette expression étant vraie pour tout temps on doit donc avoir

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi \implies k = \frac{n\pi}{L} \quad (14)$$

Les nombre d'ondes sont **quantifiés**. Il n'y a que certaines longueurs d'ondes, ou fréquences qui sont permises dans cette cavité, elles sont données par

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad ; \quad \omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L} \quad ; \quad f_n = \frac{nc}{2L} \quad (15)$$

Ces fréquences permises sont appelées **fréquences propres** de la cavité. Le champ électrique correspondant est un **mode propre**

$$\vec{E}_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \vec{u}_y \quad (16)$$

Le mode de fréquence le plus bas est appelé *fondamental* et les autres, dont la fréquence est un multiple de celle du fondamental, sont appelés *harmoniques*.

Ainsi si on acquiert le spectre d'un instrument à vent comme une clarinette, on observe des fréquences régulièrement espacées, comme sur la figure 4.

Cette quantification de la fréquence d'ondes confinées et l'apparition de modes propre se retrouvent partout en physique : en quantique, c'est ce qui explique les spectres d'émission des atomes (les électrons étant « confinés » autour de l'atome), en acoustique évidemment (corde de guitare, instrument à vent), en mécanique des fluides (cuve à ondes), en mécanique des milieux continus (figures de Chladni).

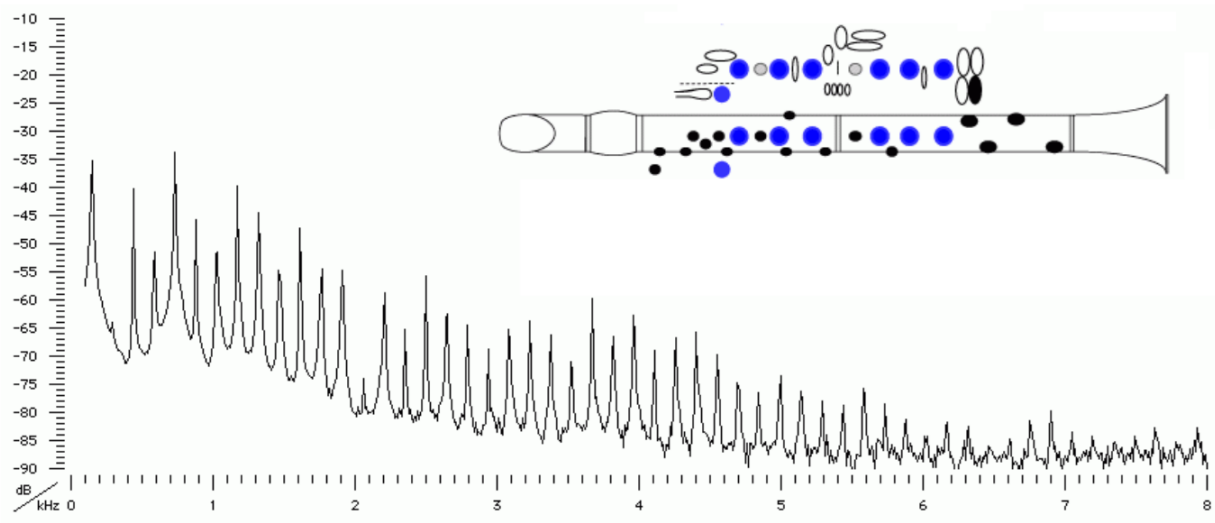


FIGURE 4 – Spectre d'une clarinette, extrait de CCS TSI 2024.