

Électromagnétisme Partie II : Équations de Maxwell et Ondes Électromagnétiques

Chapitre 2 : Propagation d'ondes électromagnétiques

1 Outils mathématiques et rappels

1.1 Opérateur Laplacien

On définit l'opérateur *laplacien*, opérateur du **second ordre** noté Δf . Cet opérateur prend en entrée un **champ scalaire** et renvoie en sortie un **champ scalaire**. Il est défini par la relation

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \quad (1)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression à connaître du laplacien est

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2)$$

Le laplacien scalaire est une sorte de généralisation 3D de la dérivée seconde.

Pour finir, on définit également l'opérateur *laplacien vectoriel* noté $\vec{\Delta} \vec{f}$. Cet opérateur prend en entrée un **champ vectoriel** et renvoie en sortie un **champ vectoriel**. En coordonnées cartésiennes le laplacien vectoriel peut s'écrire comme

$$\vec{\Delta} \vec{f}(x, y, z) = \Delta f_x \vec{u}_x + \Delta f_y \vec{u}_y + \Delta f_z \vec{u}_z \quad (3)$$

$$\vec{\Delta} \vec{f} = \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \quad (4)$$

On peut exprimer le laplacien vectoriel en fonction d'autres opérateurs avec la formule (pas à connaître, qui vous sera rappelée)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{f}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{f})) - \vec{\Delta} \vec{f} \quad (5)$$

1.2 Rappels sur les ondes

Définition : Une onde progressive (ou propagative) est la propagation d'une perturbation dans l'espace à travers le temps.

On distingue généralement deux types d'ondes :

- les ondes mécaniques (onde sur une corde, son, séisme, vague à la surface de l'eau). Ces ondes correspondent à la déformation du **milieu matériel** dans lequel elles se déplacent.
- les ondes électromagnétiques (radio, lumière, micro-ondes, UV). Ces ondes peuvent se propager autant dans le vide que dans un milieu (l'air par ex.).

On dit qu'une onde est *longitudinale* lorsque la direction de propagation est la même que la direction de la perturbation (ex : ondes sonores) ou *transverse* lorsque ces deux directions sont orthogonales (onde sur une corde, vague).

On note f la fréquence d'une onde (en Hz), T sa période (en s), ω sa pulsation (en rad/s). On note λ la longueur d'onde de l'onde (en m), cela correspond à la période spatiale de l'onde. On définit également le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ (en rad/m, analogue spatial de la pulsation). La célérité d'une onde (sa vitesse de propagation) est généralement notée c et vous avez déjà vu la relation

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (6)$$

1.3 Onde plane progressive

Une *surface d'onde* est une surface continue de l'espace où la grandeur décrivant l'onde (le champ \vec{E} , la hauteur de la vague, la pression...) est uniforme à tout instant.

Une onde est dite plane si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux (ex : vagues qui viennent sur une plage rectiligne, contre-ex : vagues formées par une goutte d'eau qui tombe dans un verre). Lorsqu'elle est progressive, on parle d'onde plane progressive ou d'OPP.

Supposons que le champ $\vec{E}(x, y, z, t)$ décrit une onde plane : \vec{E} est uniforme dans chaque plan d'onde, il ne dépend donc que de l'abscisse x du plan d'onde $\vec{E}(x, t)$. Vous avez vu l'année dernière que les ondes planes progressives se mettaient sous la forme

$$\vec{E}_1(x, t) = f(x - ct)\vec{u} \quad ; \quad \vec{E}_2(x, t) = g(x + ct)\vec{u} \quad (7)$$

\vec{u} est le vecteur unitaire décrivant l'orientation du champ électrique : c'est la *polarisation de l'onde*, on en reparlera plus tard.

L'onde décrite par \vec{E}_1 se propage vers les x croissants, celle décrite par \vec{E}_2 vers les x décroissants.

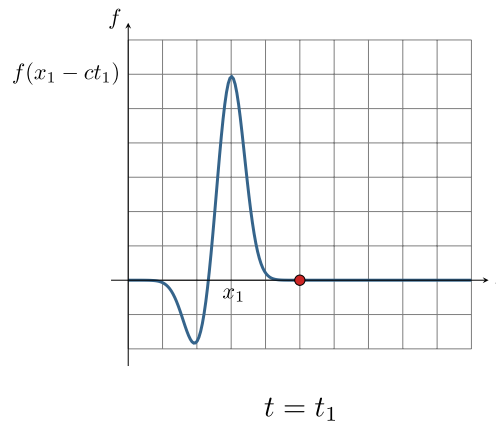


FIGURE 1 – Photo de l'onde plane progressive au temps $t = t_1$

Preuve : On suppose qu'au temps t_1 le maximum de l'onde se trouve à l'abscisse x_1 (figure 1). On cherche l'abscisse x_2 de ce max au temps $t_2 > t_1$, on a donc

$$f(x_1 - ct_1) = f(x_2 - ct_2) \implies x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \implies x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) > 0. \quad (8)$$

L'onde s'est bien propagée vers les x croissants. Le même calcul montre que pour une fonction $g(x + ct)$ on trouve $x_2 < x_1$, l'onde se propage vers les x décroissants.

Important : La *propagation* résulte donc du **couplage espace-temps**. C'est parce que x et t sont à l'intérieur de la même fonction que le signal se propage. Ainsi une fonction de la forme $f(x, t) = \chi(x)\phi(t)$ ne décrit pas une onde progressive.

2 Ondes électromagnétiques dans le vide

2.1 Équation de d'Alembert

On se place dans le vide, donc dans une zone sans charge ni courants. Les quatre équations de Maxwell sont

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9)$$

On utilise la formule d'analyse vectorielle (5) (pas à connaître, à savoir utiliser) pour le champ électrique :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} \quad (10)$$

On utilise les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday, d'où

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \operatorname{grad}(0) - \Delta \vec{E} \implies -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\Delta \vec{E} \quad (11)$$

On utilise Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\Delta} \vec{E} \quad (12)$$

On arrive finalement à l'équation de d'Alembert pour le champ électrique

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (13)$$

Remarques :

- Analyse dimensionnelle : L'unité de $\mu_0 \varepsilon_0$ se déduit de l'équation, on doit avoir $[\mu_0 \varepsilon_0] = \text{s}^2/\text{m}^2$. On note ainsi

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (14)$$

où c , en m/s est la célérité de l'onde électromagnétique. Ainsi $c \simeq 3,0 \times 10^8$ m/s, c'est la vitesse de la lumière! On écrit alors souvent l'équation de d'Alembert sous la forme

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (15)$$

- C'est une *équation aux dérivées partielles* (comme l'équation de la chaleur) faisant donc intervenir les dépendances spatiales et temporelle du champ électrique.
- C'est une équation vectorielle donc trois équations scalaires (une sur chacune des composantes du champ électrique).
- En coordonnées cartésiennes, et à une dimension (selon x) cette équation devient

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (16)$$

- Si on applique la formule du double rotationnel au champ magnétique, on obtient la même équation pour \vec{B}

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (17)$$

- Cette équation peut porter d'autres noms, « équation de propagation », « équations des ondes ».

2.2 Solutions de l'équation de d'Alembert

2.2.1 Onde plane progressive

Les ondes planes progressives sont solution de l'équation de d'Alembert, en effet prenons un champ électrique décrit par une onde plane progressive polarisée selon la direction \vec{u}

$$\vec{E}(x, t) = f(x - ct) \vec{u} \quad (18)$$

On projette l'équation de d'Alembert sur \vec{u} . Vérifions que cette OPP est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial f(x - ct)}{\partial x} = f'(x - ct) \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial f'(x - ct)}{\partial x} = f''(x - ct) \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial f(x - ct)}{\partial t} = -c f'(x - ct) \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -c \frac{\partial f'(x - ct)}{\partial t} = c^2 f''(x - ct) \quad (20)$$

En injectant dans d'Alembert

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = f''(x - ct) - \frac{1}{c^2} c^2 f''(x - ct) = 0 \quad (21)$$

Les ondes planes progressives sont bien solution de l'équation de d'Alembert! Cette équation décrit ainsi bien la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide.

2.2.2 Onde plane progressive harmonique

Un cas particulier d'onde plane est l'*onde plane progressive harmonique* (OPPH), ou *onde plane progressive monochromatique* (OPPM). Ces solutions s'écrivent sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u} \quad (22)$$

avec E_0 l'amplitude, ω la pulsation de l'onde, k le vecteur d'onde et \vec{u} la direction de polarisation. C'est bien une onde **plane** (les surfaces d'ondes sont des plans à $x = \text{cste}$), **progressive** (car x et t à l'intérieur de la même fonction) et **harmonique** (ou monochromatique) car il y a une seule pulsation ω (donc fréquence) de décrite.

Voyons ce que cela donne lorsque l'on injecte cette solution dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = k E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \cos(\omega t - kx) \vec{u} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t - kx) \vec{u} \quad (24)$$

On utilise l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \implies -k^2 \cos(\omega t - kx) \vec{u} + \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kx) \vec{u} = \vec{0} \implies k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (25)$$

On trouve finalement la **relation de dispersion**

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (26)$$

On la réécrit généralement

$$\omega = kc \implies 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} c \implies f = \frac{c}{\lambda} \quad (27)$$

Cette relation entre fréquence et longueur d'onde est donc une **conséquence** de l'équation de d'Alembert ! Cela veut dire que pour des ondes décrites par une équation plus complexe, cette relation ne sera plus vraie (car la relation de dispersion sera plus complexe).

Remarque : On définit le *vecteur d'onde* \vec{k} comme le vecteur de norme k et dont la direction est celle de la propagation. Ici la propagation se fait selon x donc $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

3 Structure d'une OPPH

3.1 Notation complexe

Comme en électricité où on utilisait la notation complexe en régime variable, on va l'utiliser ici pour décrire les OPPH. On note le champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}$ et il est donné par

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u} \quad (28)$$

Il est relié au champ réel par

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \underline{\vec{E}} \right\} \quad (29)$$

Ici le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$. On se souvient de l'expression des opérateurs divergences en fonction de l'opérateur $\vec{\nabla}$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (30)$$

On admet ainsi qu'en notations complexes, ces opérateurs appliquées à une OPPH font la chose suivante

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \quad (31)$$

Exemple : Montrer que c'est bien vrai pour l'opérateur divergence.

3.2 Caractère transverse du champ électrique

On se place en notations complexes, on prend une OPPH se propageant dans la direction des x croissants, polarisée selon l'axe \vec{u}

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u} \quad (32)$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide nous dit que

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0 \implies -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \implies \vec{k} \cdot \vec{u} = 0 \quad (33)$$

Le champ électrique est donc **transverse**. En effet **direction de propagation** (\vec{k}) et direction de perturbation (\vec{u}) sont **orthogonales**.

On peut donc définir l'axe \vec{u}_y tel que $\vec{u} = \vec{u}_y$ et noter notre OPPH

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y \quad (34)$$

Le champ réel est donc

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \quad (35)$$

3.3 Champ magnétique et relation de structure

Les champs \vec{E} et \vec{B} ne sont pas indépendants mais reliés par les équations de Maxwell. Si on veut déterminer le champ \vec{B} associé à l'OPPH décrite précédemment, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe. On note ainsi

$$\underline{\vec{B}} = B_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}' \quad (36)$$

on cherche ici à déterminer l'amplitude B_0 et la direction du champ \vec{u}' .

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \implies -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad (37)$$

On trouve finalement la relation de structure

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \quad (38)$$

Qui reste vraie pour les OPPH réelles

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (39)$$

Dans notre cas on a donc

$$\underline{\vec{B}} = \frac{k\vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}\vec{u}_y}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z \quad (40)$$

et en utilisant la relation de dispersion $\omega = kc$ on trouve

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z \quad (41)$$

le champ réel est donc

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \quad (42)$$

Remarques :

- Le champ \vec{B} est lui aussi transverse car orthogonal à la direction de propagation.
- La structure de l'onde est due à l'équation de Maxwell-Gauss (33) et à la relation de structure (39). Ces relations montrent que \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} forment un trièdre direct et sont donc orthogonaux deux à deux (figure 2).

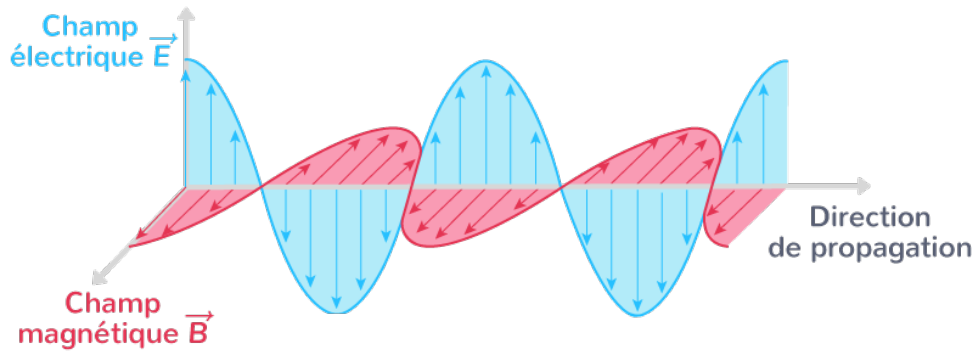


FIGURE 2 – Structure d’une onde électromagnétique. La direction de propagation, donnée par \vec{k} et les direction de \vec{E} et \vec{B} sont orthogonales deux à deux.

4 Énergie et vecteur de Poynting

4.1 Densité volumique d’énergie électromagnétique

La propagation des champs \vec{E} et \vec{B} est une propagation d’énergie : nous le savons car le soleil nous réchauffe, les micro-ondes chauffent nos plats etc. Nous allons dans cette sous partie décrire l’énergie contenue dans les champs en tout point de l’espace. On note u_{em} la densité d’énergie électromagnétique, donc en J/m^3 . Son expression est

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (43)$$

Remarques :

- Ces expressions sont *quadratiques* (grandeur au carré), comme souvent pour l’énergie : énergie cinétique $1/2mv^2$, énergie stockée dans un ressort $1/2kx^2$ etc.
- Chaque champ est associé à la constante correspondante, \vec{E} avec ε_0 (Maxwell-Gauss) et \vec{B} avec μ_0 (Maxwell-Ampère).

Exemples :

- Énergie stockée dans un condensateur plan en électrostatique. Les deux plaques sont de surface S , espacées de e , de charge opposées Q et $-Q$, on note $\sigma = Q/S$ la charge surfacique. On note U la différence de potentiel appliquée entre les plaques. Le champ électrique entre les plaques est (cf. électrostatique)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad (44)$$

La densité volumique d’énergie électromagnétique entre les armatures est

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} \quad (45)$$

car il n’y a pas de champ magnétique ici. L’énergie stockée entre les armatures est donc

$$\mathcal{E}_{em} = u_{em} \times V = u_{em} S e = \frac{Q^2 e}{2\varepsilon_0 S} \quad (46)$$

On se souvient de l’expression de la capacité du condensateur plan, et de la relation entre charge, capacité et tension

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad ; \quad Q = CU \quad (47)$$

et ainsi

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 \quad (48)$$

On retrouve l’expression connue de l’énergie stockées dans un condensateur.

- Énergie stockée dans une bobine « infinie » de longueur l , de section S , composée de N spires, de densité de spires $n = N/l$, parcourue par un courant I uniforme et constant. Le champ magnétique à l'intérieur est (cf. magnétostatique)

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z \quad (49)$$

donc la densité volumique d'énergie électromagnétique est

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \quad (50)$$

car pas de champ électrique ici. L'énergie stockée dans la bobine est donc

$$\mathcal{E}_{em} = u_{em} \times V = u_{em} S l = \frac{\mu_0 n^2 I^2 S l}{2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2l} \quad (51)$$

L'inductance L de cette bobine est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad (52)$$

On trouve donc

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (53)$$

qui est bien l'expression de l'énergie stockée dans une bobine.

- Énergie volumique moyenne portée par une OPPH. Les expressions des champs pour une OPPH se déplaçant vers les x croissants est

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \quad (54)$$

Ainsi

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t - kx) + \frac{E_0^2}{2c^2 \mu_0} \cos^2(\omega t - kx) \quad (55)$$

On factorise par le \cos^2 et on se souvient que $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$u_{em} = \cos^2(\omega t - kx) \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2c^2} c^2 \varepsilon_0 \right) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (56)$$

La valeur moyenne de l'énergie électromagnétique portée par cette onde est

$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \quad (57)$$

Lorsqu'on voit cette expression on peut avoir l'impression qu'on a pris que la partie électrique de l'énergie électromagnétique, mais notre calcul montre que l'on a bien pris en compte le champ \vec{B} . On a en fait vu que chacun des champs avait la même densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne, $\varepsilon_0 E_0^2/4$.

Ici on vient de voir l'expression de la densité d'énergie électromagnétique, mais on n'a pas vu comment cette énergie se *propageait*, par exemple on ne peut pas calculer la puissance reçue par un panneau solaire de surface S exposé à la lumière.

4.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur caractérisant la propagation de l'énergie électromagnétique est le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (58)$$

son unité est le W/m^2 , c'est une **puissance surfacique**.

Analyse dimensionnelle : Retrouvons l'unité de $\vec{\Pi}$. On utilise Maxwell-Ampère pour l'unité de \vec{B}

$$[B] = [\mu_0] A/m \implies [\Pi] = \frac{[\mu_0] A V}{[\mu_0] m^2} \quad (59)$$

la puissance dissipée par effet joule est $P = UI$ donc on a bien $A V = W$ donc

$$[\Pi] = W/m^2 \quad (60)$$

Conséquences : La puissance rayonnée \mathcal{P} à travers une surface S est donc

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad (61)$$

l'énergie $d\mathcal{E}$ traversant cette surface S pendant le temps dt

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P} dt = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt \quad (62)$$

Exemple : Vecteur de Poynting pour une onde plane progressive harmonique se déplaçant vers les x croissants. On se rappelle des expressions d'OPPH pour les champs \vec{E} et \vec{B}

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \quad (63)$$

On a donc

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x \quad (64)$$

On trouve bien que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est orienté selon $+\vec{u}_x$, sens de propagation de l'onde et donc sens de propagation de l'énergie!

En optique, les capteurs sont sensibles à la norme de la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$, appelée intensité lumineuse I

$$I = \left| \langle \vec{\Pi} \rangle \right| = \left| \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \right| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c = \langle u_{em} \rangle c \quad (65)$$

Remarque* : Cette expression

$$\left| \langle \vec{\Pi} \rangle \right| = \langle u_{em} \rangle c \quad (66)$$

peut être interprétée comme le fait que le vecteur de Poynting propage l'énergie électromagnétique u_{em} à la vitesse c . Une façon de le voir est de se rappeler de l'expression de la densité volumique de courant \vec{j} (en A/m²) en fonction de la densité volumique de charge ρ (en C/m³) et de la vitesse \vec{v} des porteurs de charge, on avait

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (67)$$

le courant correspond transport de la charge à la vitesse v . En identifiant les termes dans l'expression du début, on arrive à l'interprétation faite.

4.3 (HP) Bilan local de Poynting

On vient de voir que le vecteur de Poynting correspond à la propagation de l'énergie électromagnétique, dans une relation similaire à celle qui relie les densités volumiques de courant et de charge. Ces deux dernières sont reliées par l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (68)$$

qui nous dit que localement, la charge varie si le courant est inhomogène. De même, on peut chercher une équation qui nous dirait que localement, l'énergie électromagnétique varie si son flux est inhomogène. On admet la formule d'analyse vectorielle suivante, pour tous champs vectoriels \vec{A} et \vec{B}

$$\operatorname{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \quad (69)$$

On applique cette formule, puis les équations de Maxwell afin de calculer la divergence du vecteur de Poynting

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \quad (70)$$

or les champs et leurs dérivées temporelles sont orientées dans la même direction, donc les produits scalaires s'en vont, sauf dans le terme avec le courant

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left[-B \frac{\partial B}{\partial t} - E \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (71)$$

On utilise le fait que

$$E \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (72)$$

et de même pour B, ainsi

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = -\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial B^2}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (73)$$

En identifiant l'expression de la densité d'énergie électromagnétique, on arrive finalement à l'équation locale de Poynting

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (74)$$

4.4 Utilité et limites du modèle de l'OPPH

On vient d'utiliser à plusieurs reprises le modèle de l'OPPH pour décrire nos champs, ce qui rend les calculs assez simples. Cependant on voit que ce modèle ne décrit pas une onde électromagnétique telle qu'on la conçoit physiquement :

- La moyenne de la densité d'énergie contenue dans cette onde, est uniforme dans tout l'espace : cela veut dire que cette onde n'a pas de limite spatiale et qu'elle couvre l'entièreté de l'espace.
- La moyenne de la densité d'énergie contenue dans cette onde, est constante dans le temps : cela veut dire que cette onde n'a ni début ni fin.

On voit ici que ce modèle, pratique, ne décrit pas un signal réel qui lui a un début, une fin, et est confiné dans une certaine zone de l'espace. Pourquoi alors utiliser ce modèle si il est si loin de la réalité ? L'analyse de Fourier nous dit que toute onde plane progressive peut être décomposée en somme d'OPPH. Ainsi les connaissances que nous avons acquises sur les OPPH peuvent être transmises aux OPP qui sont plus proches d'un signal réel.

5 Polarisation

On l'a évoqué plusieurs fois au cours de ce chapitre, la polarisation de l'onde correspond à la direction du champ électrique \vec{E} , si on écrit $\vec{E} = E\vec{u}$, la direction de polarisation est \vec{u} . Dans le cas général, ce vecteur \vec{u} peut dépendre du temps.

Attention : Il ne faut pas confondre *direction de polarisation* et *direction de propagation*. Dans tous les cas que nous rencontrerons, ces deux directions sont orthogonales !

La polarisation de la lumière est un phénomène complexe, donnant lieu à de nombreuses applications par exemple les lunettes de soleil polarisées ou les lunettes de cinéma 3D. La lumière naturelle (provenant du soleil) est dite non polarisée car sa direction de polarisation fluctue **rapidement** et **aléatoirement**. La lumière créée par la plupart des sources lumineuses (ampoules à filaments, LED). Au contraire, certains écrans (téléphone, téléviseur) émettent de la lumière polarisée.

Lorsque cette direction est constante, on dit que la polarisation est **rectiligne**. C'est le cas qui conduit aux calculs les plus simples, et donc celui que l'on rencontrera quasi-exclusivement. Lorsque nous avons décrit le champ électrique par une OPPH, nous avons trouvé que

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad (75)$$

ici la direction de polarisation est \vec{u}_y , vecteur constant, cette OPPH est donc polarisée rectilignement.

Une manière de polariser rectilignement une lumière non polarisée est l'utilisation d'un *polariseur*, dont le principe est schématisé sur la figure 3.

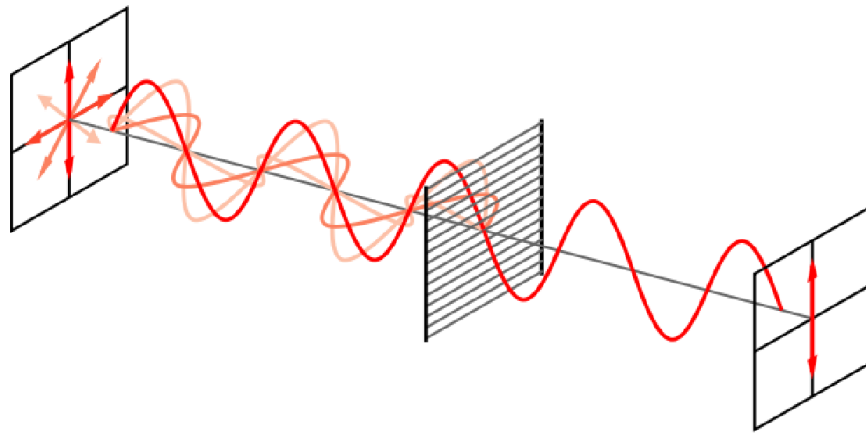


FIGURE 3 – Principe de fonctionnement d'un polariseur, extrait de Wikipédia