

Électromagnétisme Partie II : Équations de Maxwell et Ondes

Électromagnétiques

Chapitre 1 : Équations de Maxwell

31 mars 2026

Vers 1865 Maxwell pose les bases de ce qu'on connaît aujourd'hui comme les équations de Maxwell : quatre équations aux dérivées partielles, résumant l'ensemble de l'électromagnétisme (si on y ajoute la force de Lorentz). Ces équations permettent d'interpréter et de modéliser les lois de l'électrocinétique, l'électrostatique, le magnétisme, l'induction, et la propagation d'ondes électromagnétiques (radio, téléphonie, ondes lumineuses, micro-ondes).

1 Énoncé des équations locales (complètes)

On note ρ la densité volumique de charge (en C/m³), \vec{j} la densité volumique de courant (en A/m²), $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m la permittivité diélectrique du vide et $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$ H/m.

Les quatre équations de Maxwell sont

- Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

- Maxwell-Faraday

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

- Maxwell-Thomson

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

- Maxwell-Ampère

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Remarques :

- On retrouve les équations vues en électrostatique et en magnétostatique pour des champs ne dépendant pas du temps (cohérent avec la notion de *statique*).
- En statique, l'équation de Maxwell-Gauss nous a dit que les charges étaient **sources** de champ électrique, Maxwell-Ampère que les courants étaient sources de champ magnétique. Ici on voit ainsi (dans Maxwell-Faraday) que les *variations temporelles* de champ magnétique sont sources de champ électrique, et (dans Maxwell-Ampère) que les *variations temporelles* de champ électrique sont sources de champ magnétique.
- Le terme supplémentaire dans Maxwell-Ampère $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ a la même unité que \vec{j} , donc en A/m². On l'appelle généralement *courant de déplacement*.
- Le théorème de Gauss reste ainsi vrai en dehors du régime statique, le théorème d'Ampère non (présence d'un nouveau terme dans Maxwell-Ampère).
- On ne peut plus définir le potentiel électrostatique V comme on le faisait en électrostatique (car maintenant $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} \neq \vec{0}$).
- Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ (pas de charge ni de courant dans le vide!)

2 Formulations intégrales

On rappelle les théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes (pas à connaître, à savoir utiliser). Pour tout champ vectoriel \vec{A} , surface fermée S (entourant le volume V) et contour fermé \mathcal{C} (entourant la surface S')

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad ; \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S'} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}' \quad (5)$$

Important : Dans les situations rencontrées en physique cette année, les opérateurs de dérivée temporelle et de dérivée spatiale **commuteront toujours**. Exemple :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \quad (6)$$

En appliquant ces théorèmes (Ostrogradski lorsqu'il y a l'opérateur divergence, Stokes lorsqu'il y a rotationnel) aux équations de Maxwell, on trouve :

- Le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (7)$$

- La loi de Faraday, en effet :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (8)$$

On se rappelle des définitions du flux du champ magnétique Φ_B et de la force électromotrice (tension) e :

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

on a alors

$$e = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (10)$$

- Structure du champ magnétique

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11)$$

ce qui nous dit notamment que les lignes de champ magnétique sont toujours fermées.

- Théorème d'Ampère généralisé, en effet

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (12)$$

On a donc

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

Remarques :

- L'équation de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell. En effet si on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \right) = \mu_0 \operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (14)$$

On utilise Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

On retrouve bien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (16)$$

À une dimension

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

- Les équations de Maxwell vues dans la première section sont « locales » car elles concernent des grandeurs définies en tout point de l'espace (champ électrique, densité volumique de charge, etc). Les lois vues dans cette deuxième section sont intégrales car elles s'appliquent à un système (surface fermée, circuit, etc).