Méthodes
Chap.16 : Recherche d'extremum d'une fonction de plusieurs variables

Théorème des bornes atteintes

Théorème 0.1. *Soient K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K.*
Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe (x_m, y_m) et (x_M, y_M) dans K tels que, pour tout $(x, y) \in K, f(x_m, y_m) \leqslant f(x, y) \leqslant f(x_M, y_M)$.

Théorème 0.2. *Condition nécessaire pour point critique*
Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Si f admet un extremum (i.e. un minimum ou un maximum) local au point $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f, i.e. $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$.

Remarque 0.3. *Attention, la réciproque de 0.2 est fausse : le gradient peut s'annuler en un point qui n'est ni un minimum ni un maximum (voir exemple du cours, on parle de point selle ou de point col).*

On considère Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ non vide, fermée et bornée ainsi qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

L'objectif est de déterminer les extrema (i.e. minimum et maximum) globaux de f sur Ω.

MÉTHODE :

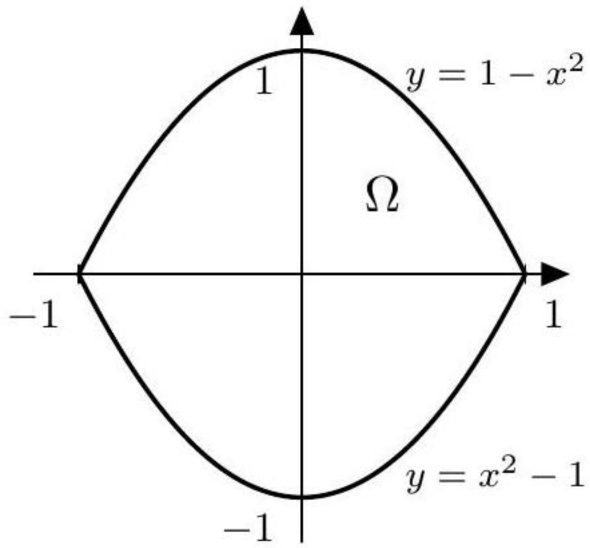
1. On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue sur Ω. D'après Th.0.1 , on en déduit que f admet un minimum (global) et un maximum (global) sur Ω.
2. On cherche à appliquer Th.0.2 . Pour cela, on considère l'intérieur U de Ω et on justifie que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
   On calcule ensuite le gradient de f et on cherche **les points critiques**, i.e. ceux qui annulent le gradient.
3. On étudie ce qui se passe sur le bord $\partial\Omega$ en se ramenant à des études de fonctions d'une seule variable.
4. On compare les candidats obtenus dans les deux étapes précédentes : on cherche la valeur minimale et la valeur maximale parmi toutes celles trouvées.

Exemple 0.4. *Déterminer les extrema de la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = y^2 - yx^2 + x^2$$

sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

1. *La fonction f est polynomiale donc continue sur Ω qui est fermé (car déterminé par des inégalités larges) et borné comme le montre le schéma ci-contre.*
   On en déduit donc (Th. 0.1) que f est bornée sur Ω et atteint ses bornes.
   Autrement dit, f admet un minimum et un maximum sur Ω.



2. *Comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.*
   Les points critiques de f sont les solutions de $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{0}$, i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

   De la première équation, on tire deux cas : $x = 0$ ou $y = 1$.
   En remplaçant dans la seconde équation, on obtient ainsi trois points critiques : $(0,0)$, $(-\sqrt{2},1)$ et $(\sqrt{2},1)$.
   Or le point $(\sqrt{2},1)$ n'appartient pas à U $\text{car}(\sqrt{2})^2 - 1 < 1 < 1 - (\sqrt{2})^2$ n'est pas vérifiée.
   Il en est de même pour $(-\sqrt{2},1)$. (On peut aussi placer ces points sur

le schéma ci-dessus pour se convaincre.)
Ainsi $(0,0)$ *est le seul point critique de* f *dans* U *et en ce point on a* $f(0,0)=0$.

3. *On considère maintenant le bord de* Ω.
Il y a deux cas : celui «du haut» (au-dessus de l'axe des abscisses) d'équation $y=1-x^2$ *et celui «du bas» (en dessous de l'axe des abscisses) d'équation* $y=x^2-1$.

 - *Commençons par celui du haut. Un point de coordonnées* (x,y) *appartient à ce bord si et seulement* $y=1-x^2$ *et* $x\in[-1;1]$. *En injectant dans l'expression de* f, *on doit étudier la fonction* g *définie par :*

$$g(x)=\left(1-x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)x^2+x^2=2x^4-2x^2+1$$

 sur l'intervalle $[-1;1]$. *Cette fonction est dérivable sur* $[-1;1]$ *en tant que fonction polynomiale et on a*

$$\forall x\in[-1;1], g'(x)=8x^3-4x=4x\left(2x^2-1\right)$$

 La dérivée s'annule donc pour $x=0$ *et* $x=\pm1/\sqrt{2}$ *d'où le tableau de variations :*

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

 On obtient donc comme candidat pour un maximum la valeur 1 atteinte pour $x=-1,0$ *ou 1 , i.e. via l'équation* $y=1-x^2$, *pour les points de coordonnées* $(-1,0),(0,1)$ *et* $(1,0)$. *De même pour un minimum, on a la valeur* $1/2$ *pour les points* $(-1/\sqrt{2},1/2)$ *et* $(1/\sqrt{2},1/2)$.
 - *On s'intéresse maintenant au bord du bas d'équation* $y=x^2-1$. *En injectant dans l'expression de* $f(x,y)$, *on doit étudier la fonction* h *définie par*

$$h(x)=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)x^2+x^2=1$$

sur l'intervalle $[-1;1]$.
Cette fonction étant constante égale à 1 , il n'y a aucune étude à faire.

4. *D'après les points 2 et 3 , le minimum de* f *est 0 qui est atteint au point* $(0,0)$ *et le maximum est 1 qui est atteint sur tout le bord du bas (i.e. la courbe d'équation* $y = x^2 - 1$ *) ainsi qu'en (0,1).*
Remarque : *les points (* $-1,0$ *) et* $(1,0)$ *étant les points de jonction entre les deux bords, on peut considérer qu'ils appartiennent aussi au bord du bas.*

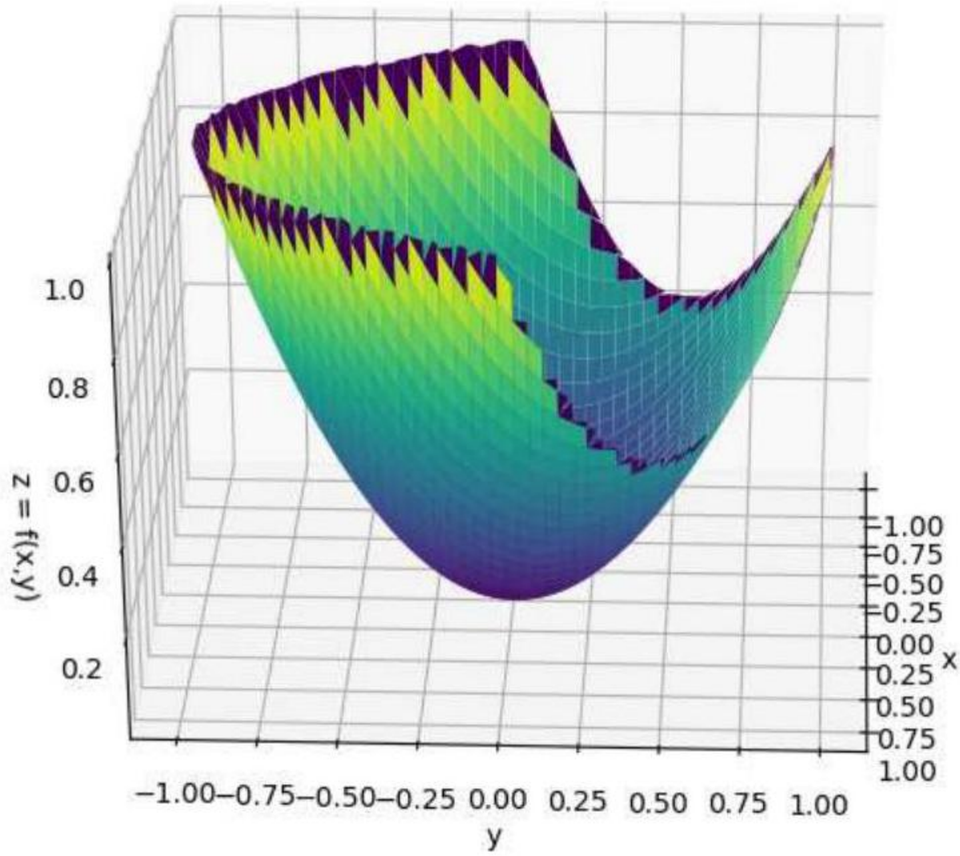


Figure 1 : *Représentation 3D du graphe de* f *(on trace* $z = f(x,y)$ *).*
Attention à l'orientation des axes : le bord du bas est à gauche et le bord du haut à droite.
De plus, le violet-noir en haut sur la moitié gauche devrait être du jaune mais il y a des soucis avec le bord. . .

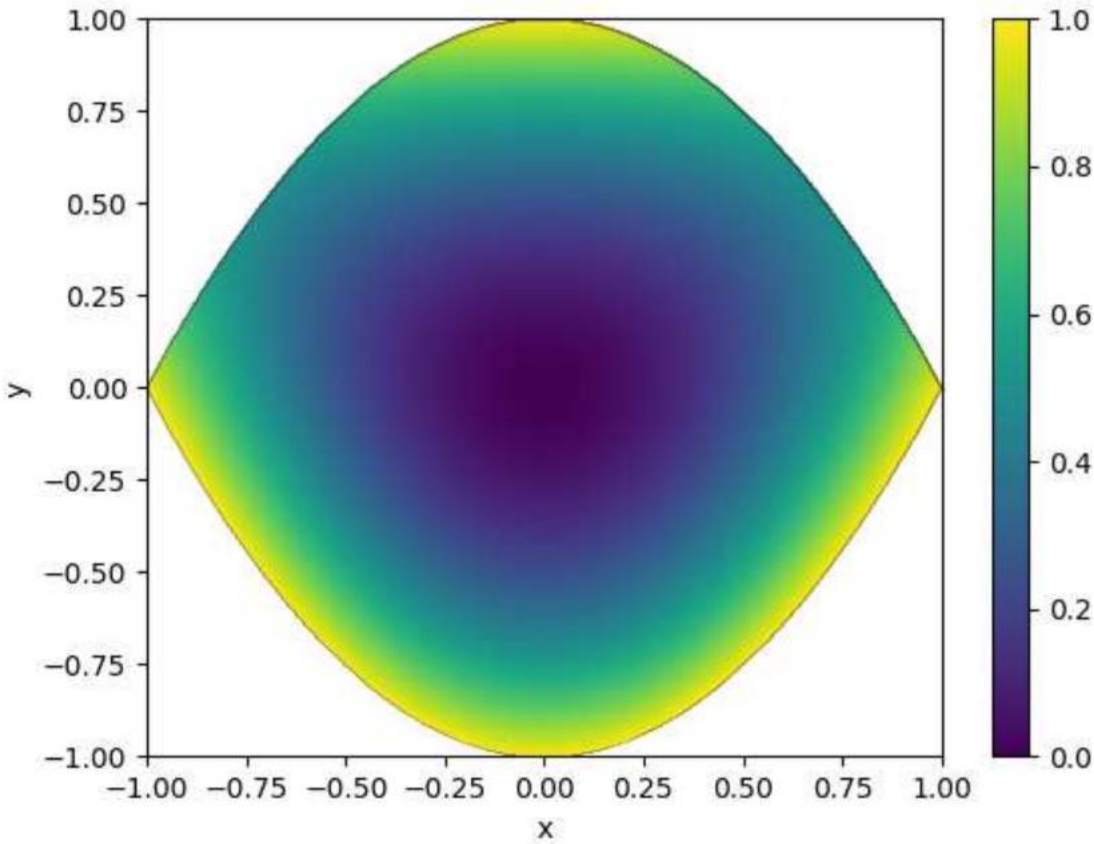


Figure 2 : Une vue du dessus où la coloration permet bien de visualiser l'emplacement des extrema.