

Exercices

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Matrices

Exercice 1.1. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant calculer leur inverse.

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.2. Discuter, selon les valeurs du paramètre réel λ , l'existence et le nombre de solutions des systèmes suivants. Dans chaque cas on donnera l'ensemble des solutions du système.

$$1. \begin{cases} -(2 + \lambda)x - 2y - 6z = 0 \\ x - (1 + \lambda)y + z = 0 \\ x + 3y + (5 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -\lambda x + y - z = 0 \\ x - (2 + \lambda)y + z = 0 \\ 2x - (1 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.3. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.4. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Expliciter la matrice D définie par $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
A l'avenir, ce résultat sera admis (inutile de le redémontrer).
4. Expliciter alors A^n .

Exercice 1.5. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

1. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, calculer $R(\theta)R(\varphi)$.
2. Pour quelles valeurs de θ la matrice $R(\theta)$ est-elle inversible ? Donner alors son inverse.

2 Combinaisons linéaires, familles libres, familles génératrices

Exercice 2.1. 1. Le vecteur $(3, 5, 4)$ est-il combinaison linéaire de

$$((1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1)) ?$$

2. Le vecteur $P(X) = 2X^2 - 3X + 5$ est-il combinaison linéaire de

$$(3X^2 - X, X^2 - 2X + 2) ?$$

Exercice 2.2. Écrire les ensembles suivant sous la forme $\text{Vect}(\dots)$:

1. $E_1 = \{(x + y, x - y, 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
3. $E_3 = \{(a + b)X^2 + 2aX - b \in \mathbb{R}[X] / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2.3. Déterminer une famille génératrice des ensembles suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P'(2) = 0\}$

Exercice 2.4. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $\mathcal{B}_2 = (X^3, X^2(X - 2), X(X - 2)^2, (X - 2)^3)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2.5. On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère les fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 : x \rightarrow 1 \\ e_2 : x \rightarrow x \\ e_3 : x \rightarrow x^2 \\ e_4 : x \rightarrow x^3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 : x \rightarrow 1 \\ f_2 : x \rightarrow \cos(x) \\ f_3 : x \rightarrow \cos(2x) \\ f_4 : x \rightarrow \cos^2(x) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 : x \rightarrow 1 \\ g_2 : x \rightarrow x^3 + 1 \\ g_3 : x \rightarrow |x^3| \end{array} \right.$$

1. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle libre ou liée ?
2. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ou liée ?
3. La famille (g_1, g_2, g_3) est-elle libre ou liée ?

Exercice 2.6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$.

On souhaite montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour cela, nous allons raisonner par récurrence pour montrer que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{"la famille } (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre"}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On souhaite montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre, donc on cherche tous les réels $a_1, \dots, a_{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 f_1(x) + \dots + a_{n+1} f_{n+1}(x) = 0$$

- (a) Diviser l'égalité ci-dessus par $e^{(n+1)x}$ puis en faisant tendre x vers une valeur bien choisie, montrer que $a_{n+1} = 0$
- (b) Montrer ensuite que $a_1 = \dots = a_n = 0$ puis conclure.

3 Sous-espaces vectoriels

Exercice 3.1. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où n est un entier naturel non nul.

On considère l'ensemble $E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

Montrer que E_A est un espace vectoriel.

Exercice 3.2. On considère l'équation différentielle :

$$y' + x^2 y = 0$$

Montrer, sans la résoudre, que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation est un espace vectoriel.

Exercice 3.3. Montrer que $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

4 Base, dimension, coordonnées

Exercice 4.1. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :

1. $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x + y + z & y \\ z & y & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
6. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0\}$
7. $G = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = 2 - x$.

Exercice 4.2. Soit a un réel et soient $\vec{x} = (1, 1, a), \vec{y} = (1, a, 1)$ et $\vec{z} = (a, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang de la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. (On sera amené à distinguer plusieurs valeurs de a)

Exercice 4.3. 1. Montrer que les trois ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de chacun d'eux :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x + y = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y + 3z + t = 0\} \\ H &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; t = -x + 2z\} \end{aligned}$$

2. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
3. Même question pour $G \cap H$.

Exercice 4.4. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 4.5. 1. Montrer que la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 4.6. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
Même question pour e_2 puis pour e_3 .

Exercice 4.7. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille :

$$\mathcal{B} = \{X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = 4X^2 - 8X + 8$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Vérifier le résultat de la question 2 à l'aide de la question précédente.

Exercice 4.8. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $e'_j = \left(\sum_{i=1}^n e_i\right) - e_j$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base de E .
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

5 Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 5.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \leq 0\}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 5.2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose de plus $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}(A, B)$.

Démontrer que D et F sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.3. On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}_3[X]$ suivants :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$

$$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

$$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}$$

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = 0\}$.

2. Montrer alors que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 5.4. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on note :

$$F_i = \{P \in E / \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$$

On admet que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_n$

6 Hyperplans

Exercice 6.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

On considère $H_1, H_2, \dots, H_n$ des hyperplans de E .

1. À l'aide de la formule de Grassmann, montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) \geq n - k$$

7 Exercices supplémentaires, plus difficiles...

Exercice 7.1. 1. Dans $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ on définit une loi $+$ par :

$$(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$$

et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par :

$$\lambda(x, y) = (x^\lambda, \lambda y).$$

Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Exercice 7.2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\text{Vect}(A_1, B_1) = \text{Vect}(A_2, B_2)$

Exercice 7.3. Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$