

DM1 - A rendre le 01/09/2026

Exercice 0.1. On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{\sqrt{1+(n+1)u_n^2}}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Généralités.

(a) Calculer u_1 et u_2 .

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

(c) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge.

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(e) En déduire $\lim u_n$.

2. Équivalent de (u_n) .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n + 1$.

(b) Donner la formule pour $\sum_{k=1}^n k$. La prouver par récurrence.

(c) En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

(d) En remarquant que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ est une somme télescopique, en déduire

$$\text{que } u_n^2 = \frac{2}{n^2+n+2}.$$

(e) Montrer que $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$.

3. Python.

(a) Rédiger une fonction **terme-gen(n)** sous Python qui reçoit en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n .

(b) Rédiger une fonction **équivalent(N)** sous Python qui reçoit en argument un entier naturel non nul N et qui renvoie les valeurs de $\frac{ku_k}{\sqrt{2}}$ pour $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$.

Quel est l'intérêt d'une telle fonction ?

Exercice 0.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x - 6y \\ x - y \end{pmatrix}$$

On définit deux suites par :

$$u_0 = 1, v_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (S) : \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n \end{cases}.$$

1. Étude de l'application f .

(a) L'application linéaire f est-elle injective ?

(b) Est-ce que f induit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?

2. Soient $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

(a) Donner une famille génératrice de F .

(b) Donner une famille génératrice de G .

(c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

3. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) En faisant explicitement le calcul, montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

(b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}A^nP$.

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} -2 + 3 \times 2^n & 6 - 6 \times 2^n \\ -1 + 2^n & 3 - 2 \times 2^n \end{bmatrix}$.

4. On note pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.

(a) Expliciter X_0 .

(b) Montrer que pour tout n entier $(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

(d) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n .