
Programme de khôlle 1

Semaine du 7 septembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou code Python(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Rédiger en langage Python une fonction (on pourra s'aider de la documentation CCINP) :

1. ***matrice(a)*** qui reçoit un flottant a en paramètre et qui renvoie la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = a^{i+j}$
2. ***trace(A)*** qui reçoit une matrice carrée A en paramètre et qui renvoie sa trace.
3. ***invertible(A)*** qui reçoit une matrice carrée A en paramètre et qui indique si cette matrice est inversible. Si c'est le cas, on affichera son inverse.

2 Pratique calculatoire

1. Pour chacun des vecteurs $\vec{u}$ suivants, déterminer s'il est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$. Si c'est le cas, donner la décomposition.
 - (a) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$
 - (b) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$
 - (c) $u : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{3})$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$
2. Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(-1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 3.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A vérifie la relation $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3 = 0_3$
2. Montrer que la matrice A est inversible puis expliciter A^{-1} .
3. Plus généralement, soit B une matrice carrée vérifiant une relation de la forme :

$$a_0 I_n + a_1 B + \cdots + a_p B^p = 0$$

Expliquer pourquoi une telle relation permet de conclure que B est inversible et montrer que B^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en B .

Exercice 3.3. On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que A^2 soit une combinaison linéaire de A et de I_n .

1. Montrer que A^p , pour tout entier p , est également une combinaison linéaire de A et de I_n .
2. Soit $A = J_n - I_n$, avec J_n la matrice Attila (habitée par les uns) avec $n \geq 2$.
 - (a) Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$. Calculer A^3 en fonction de A et de I_n .
 - (b) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1} .

4 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

Familles de vecteurs.

Calcul matriciel.

Espaces vectoriels.

Matrices d'une famille de vecteurs.

Espaces vectoriels de dimension finie.