

DM1 - A rendre le 01/09/2026
CORRECTION

Exercice 0.1. 1. (a) $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{1}{2}$.

(b) $\mathcal{P}(n) : u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.

- Initialisation : $\mathcal{P}(0) : u_0$ est bien défini et $u_0 = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n) &\Rightarrow u_n \text{ existe et } u_n > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + (n+1)u_n^2} > 1 > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + (n+1)u_n^2}} \text{ existe et } u_{n+1} > 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- (c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)u_n^2}}$, or $1+(n+1)u_n^2 > 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout entier naturel n . Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$, donc (u_n) est décroissante. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
- (d) On a pour n entier naturel

$$\begin{aligned}(n+1)u_n^2 \leq 1 + (n+1)u_n^2 &\Leftrightarrow \frac{u_n^2}{1 + (n+1)u_n^2} \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 \leq \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ car } u_{n+1} > 0\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(e) On a pour tout entier naturel $n, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

2. (a) On calcule en remplaçant u_{n+1} par sa définition donnée dans l'énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1 + (n+1)u_n^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{(n+1)u_n^2}{u_n^2} = n+1$$

(b) Cours.

(c)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{n^2+n}{2}$$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{1}{u_n^2} - 1 = \frac{n^2+n}{2}$. Donc $\frac{1}{u_n^2} = 1 + \frac{n^2+n}{2} =$

$\frac{n^2+n+2}{2}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = \frac{2}{n^2+n+2}$.

(e) Comme $u_n > 0$ on a donc $u_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n+2}}$.

De plus $n^2 + n + 2 \sim n^2$ donc $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$.

3. Python.

(a) Rédiger une fonction **terme-gen(n)** sous Python qui reçoit en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n .

```
from math import sqrt

def terme_gen(n):
    u = 1
    for k in range(1, n + 1):
        u = u / sqrt(1 + k * u**2)
    return u
```

(b) Rédiger une fonction **équivalent(N)** sous Python qui reçoit en argument un entier naturel non nul N et qui renvoie les valeurs de $\frac{ku_k}{\sqrt{2}}$ pour $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$.
Quel est l'intérêt d'une telle fonction ?

```
from math import sqrt

def equivalent(N):
    L = []
    for k in range(N + 1):
        L.append(k * terme_gen(k) / sqrt(2))
    return L
```

Cette fonction permet d'observer les valeurs de $\frac{u_n}{\sqrt{2}}$ et de conjecturer que cette suite converge vers 1.

ce qui revient à dire que :

$$u_k \sim \frac{\sqrt{2}}{k}$$

L'intérêt de cette fonction est donc de permettre une vérification numérique de l'équivalent de la suite (u_n) .

Exercice 0.2. 1. (a) On détermine $\text{Ker}(f)$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Par pivot de Gauss on trouve que $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc f est injective.

(B) Soit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Par pivot de Gauss on obtient :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}x + 3y \\ v = -\frac{1}{2}x + 2y \end{cases}$$

Donc f est surjective et f induit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Autre méthode : un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$ est nécessairement bijectif, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Il était donc inutile de prouver la surjectivité.

2. (a) $(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-6y \\ x-3y \end{pmatrix}.$

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3y.$$

$$\text{Donc } F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) $(x, y) \in G \Leftrightarrow (f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y.$

$$\text{Donc } G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(c) - $F + G = \mathbb{R}^2$ car $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan, donc forment une base de $\mathbb{R}^2$.

$$- F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \text{ car } \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 3\mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

3. (a) Par pivot de Gauss on obtient :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est bien diagonale.

(b) Soit $\mathcal{P}(n) : D^n = P^{-1}A^nP$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $D^0 = I_2 = P^{-1}P = P^{-1}I_2P = P^{-1}A^0P$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n) &\Rightarrow D^n = P^{-1}A^nP \\ &\Rightarrow D^nD = P^{-1}A^nPD \\ &\Rightarrow D^{n+1} = P^{-1}A^nPP^{-1}AP \\ &\Rightarrow D^{n+1} = P^{-1}A^nAP \\ &\Rightarrow D^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

(c) On a donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On effectue le produit précédent pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} -2 + 3 \times 2^n & 6 - 6 \times 2^n \\ -1 + 2^n & 3 - 2 \times 2^n \end{bmatrix}.$$

4. (a) $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

(b) On effectue le produit matriciel $AX_n = \begin{bmatrix} 4u_n - 6v_n \\ u_n - v_n \end{bmatrix}$, on obtient donc $(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$.

(c) Soit $\mathcal{P}(n) : X_n = A^nX_0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $X_0 = I_2X_0 = A^0X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(n) &\Rightarrow X_n = A^nX_0 \\ &\Rightarrow AX_n = AA^nX_0 \\ &\Rightarrow X_{n+1} = A^{n+1}X_0 \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

(d) On a donc
$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 3 \times 2^n & 6 - 6 \times 2^n \\ -1 + 2^n & 3 - 2 \times 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n &= -8 + 9 \times 2^n \\ v_n &= -4 + 3 \times 2^n \end{cases}.$$