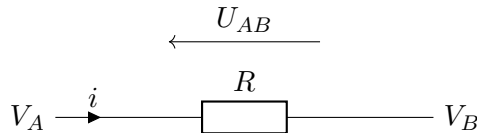


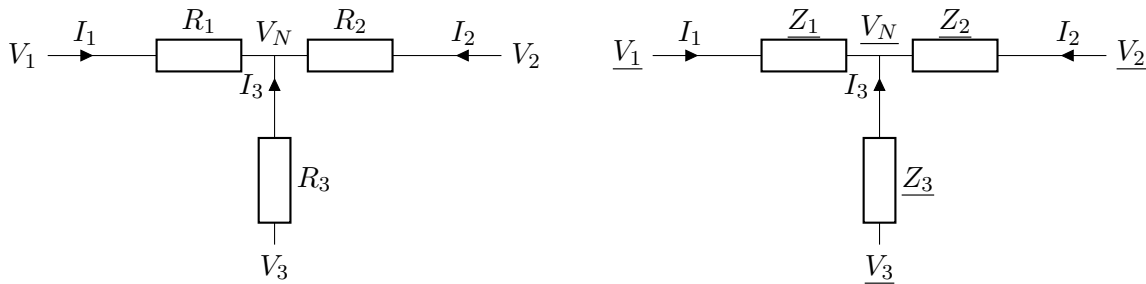
1 Loi des noeuds en terme de potentiel

Lors de l'étude des montages à ALI, nous avons souvent appliqué la loi des noeuds aux entrées inverseuse ou non inverseuse, et exprimés les courants en fonction des tensions. Nous allons rendre cela plus direct en introduisant la loi des noeuds en termes de potentiels.

Notations : V_A correspond au potentiel électrique du point A, et par définition, la tension u_{AB} est égale à $V_A - V_B$.



1. Exprimer i en fonction de V_A , V_B et R .
2. Considérons un noeud N lié à trois résistances (ou impédances). Les potentiels V_1 , V_2 et V_3 sont connus. On cherche V_N .



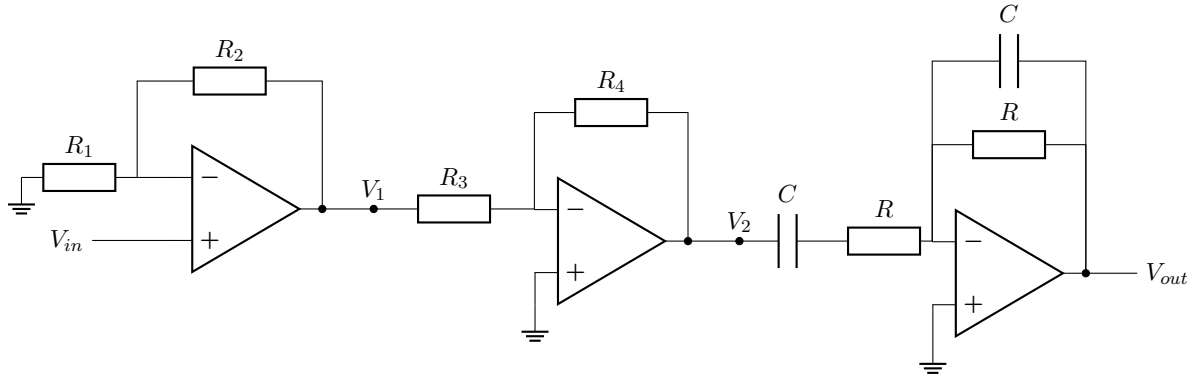
On raisonne d'abord sur le schéma de gauche, en régime permanent.

3. Exprimer i_1 en fonction de V_N , V_1 , et R_1 . Faire de même pour les branches 2 et 3.
4. Appliquer la loi des noeuds au point N. Et en déduire une relation entre les potentiels et les résistances. Comment s'adapte cette relation au cas du régime sinusoïdal forcé ? (schéma de droite).
5. En déduire l'expression suivante, appelée loi des noeuds en termes de potentiel.

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

6. Comment s'adapte cette notation dans le cas du régime sinusoïdal, avec des impédances complexes ? (Schéma de droite)

2 Filtre actif à 3 étages



On considère un montage électronique composé de trois Amplificateurs Linéaires Intégrés (ALI) montés en cascade. Tous les ALI sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Le montage est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $V_{in}(t)$ de pulsation ω .

Données numériques :

$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 30 \text{ k}\Omega$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$

1. Exprimer la tension intermédiaire V_1 en sortie du premier étage en fonction de V_{in} . En déduire le gain en tension $A_1 = \frac{V_1}{V_{in}}$.
2. Exprimer la tension intermédiaire V_2 en sortie du deuxième étage en fonction de V_1 . En déduire le gain en tension $A_2 = \frac{V_2}{V_1}$.
3. Déterminer l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_2}$ du troisième étage en fonction de R , C et ω .
4. Préciser la nature de ce filtre (type de filtre et ordre).
5. Exprimer la fonction de transfert globale $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Identifier ω_0 , Q et H_0 en fonction des différents composants et calculer leur valeur numérique.

Réponse de l'IA sur l'intérêt d'un tel montage à 3 étages :

Le circuit combine une impédance d'entrée élevée (pour ne pas perturber la source) avec une amplification stable répartie sur deux étages, évitant ainsi la distorsion. Le dernier étage transforme le signal brut en un signal propre en éliminant les parasites (composante continue, bruit basse et haute fréquence) grâce à sa fonction passe-bande. Cette structure permet d'ajuster indépendamment le gain total et la bande passante, offrant une précision bien supérieure à celle d'un montage qui tenterait de tout réaliser en un seul étage. En résumé : C'est une chaîne complète conçue pour capter, amplifier et nettoyer un signal faible afin de le rendre exploitable.

3 Equations différentielles et stabilité

Les systèmes électroniques ou mécanique sont fréquemment modélisés par des fonctions de transfert, et par les équations différentielles associées. Pour les équations différentielles d'ordre 1 et 2 à coefficients constants, il y a une propriété mathématique importante pour le physicien :

Si les coefficients d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants sont de signes différents, la solution homogène de l'équation différentielle diverge, et le système modélisé est instable.

Pour résoudre les exemples suivants, on pourra s'appuyer sur le document annexe situé en fin de TD, qui rappelle comment on résout les équations d'ordre 1 et 2 à coefficients constants et à second membre constant.

3.1 Exemple d'équation d'ordre 1

Dans un réacteur nucléaire opéré en régime surcritique en présence d'une source externe de neutrons, la densité volumique de neutrons $n(t)$ évolue selon l'équation :

$$\frac{dn(t)}{dt} - \lambda n(t) = S_0 \quad (1)$$

Notations :

- $n(t)$: densité volumique de neutrons (m^{-3})
- S_0 : taux d'émission de la source externe de neutrons ($S_0 > 0$, en $\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$)
- λ : coefficient de réactivité net de la réaction en chaîne ($\lambda > 0$, en s^{-1})

Question : résoudre cette équation différentielle et constater l'instabilité du système.

3.2 Exemples d'équation d'ordre 2

1. Oscillateur harmonique (Stable)

On considère un système masse-ressort idéal sans aucun frottement. La masse est soumise à une force de rappel élastique et à une force extérieure constante.

$$y'' + 4y = 12 \quad (2)$$

2. Régime pseudo-périodique instable

Ce cas modélise un système oscillant où un dispositif externe injecte de l'énergie proportionnellement à la vitesse (amortissement négatif), provoquant une amplification des oscillations autour d'une valeur de consigne.

$$y'' - 2y' + 5y = 10 \quad (3)$$

3. Régime critique stable

Ce cas modélise un système (comme un amortisseur de porte ou un instrument de mesure) réglé précisément à la limite de l'oscillation pour revenir à son état d'équilibre le plus rapidement possible sans oscillations, sous l'effet d'une contrainte constante.

$$y'' + 6y' + 9y = 18 \quad (4)$$

Rappel : Résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2 à coefficients constants

La solution générale d'une équation linéaire est toujours de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_h est la solution de l'équation homogène (sans second membre) et y_p est une solution particulière.

1. Équations du premier ordre : $ay' + by = E$

Soit l'équation $ay'(t) + by(t) = E$ avec $a \neq 0$ et E une constante.

1. **Solution homogène (y_h)** : On résout $ay' + by = 0$.

$$y_h(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t} \quad (C \in \mathbb{R})$$

2. **Solution particulière (y_p)** : Comme le second membre est une constante E , on cherche y_p sous forme de constante ($y' = 0$).

$$by_p = E \implies y_p = \frac{E}{b} \quad (\text{si } b \neq 0)$$

3. **Solution générale** : $y(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t} + \frac{E}{b}$.

2. Équations du second ordre : $ay'' + by' + cy = E$

Soit l'équation $ay'' + by' + cy = E$ avec $a \neq 0$ et E une constante.

Étape 1 : Solution particulière y_p

Si $c \neq 0$, la solution particulière est la constante : $y_p = \frac{E}{c}$.

Étape 2 : Équation caractéristique

On résout l'équation associée : $ar^2 + br + c = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: Deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

$$y_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

- Si $\Delta = 0$: Une racine réelle double $r_0 = -\frac{b}{2a}$.

$$y_h(t) = (At + B)e^{r_0 t}$$

- Si $\Delta < 0$: Deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$.

$$y_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$$

$$\text{Où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Étape 3 : Stabilité

Le système est **stable** si la partie réelle des racines (r_1, r_2 ou α) est **strictement négative**. Si elle est positive, la solution diverge et le système est **instable**.