

Chap.2 : Applications linéaires

Table des matières

1 Définitions	2
2 Noyau et image	3
3 Représentation matricielle	5
4 Sous-espaces stables par un endomorphisme	7
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	8
5.1 Projecteurs	8
5.2 Symétries	10

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires et il sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev (pas nécessairement de dimension finie).

1 Définitions

Définition 1.1. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si :

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

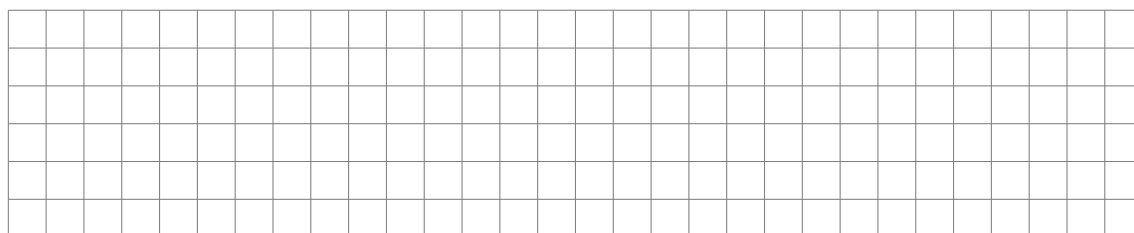
Remarque 1.2. Pas besoin de vérifier en plus que $f(0_E) = 0_F$, c'est automatiquement entraîné par ces deux propriétés.

Proposition 1.3. Caractérisation des applications linéaire).

f est linéaire ssi $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

Application 1.4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(1), P'(1)) \end{cases}$.

Démontrer que f est une application linéaire.



Définition 1.5. • On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire $E \rightarrow E$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

- On appelle **isomorphisme** entre E et F toute application linéaire bijective $E \rightarrow F$.
 - On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $E \rightarrow E$ ("auto=endo+iso").
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

La somme de deux applications linéaires est linéaire, la multiplication d'une application linéaire par un scalaire aussi, et la composée de deux applications linéaires aussi.

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi linéaire (et bijective!).

Définition 2.1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le **noyau** de f , noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$:

Application 2.2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(1), P'(1)) \end{cases}$.

[illegible]

Définition 2.4. *L'image de f , notée $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des $y \in F$ qui s'écrivent $y = f(x)$ avec $x \in E$ (c'est-à-dire les $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f).*

Proposition 2.5. *Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E alors :*

2. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$

Définition 2.7. Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle **rang** de f la dimension de son image :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Proposition 2.8. Si E et F sont de dimension finie, si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors :

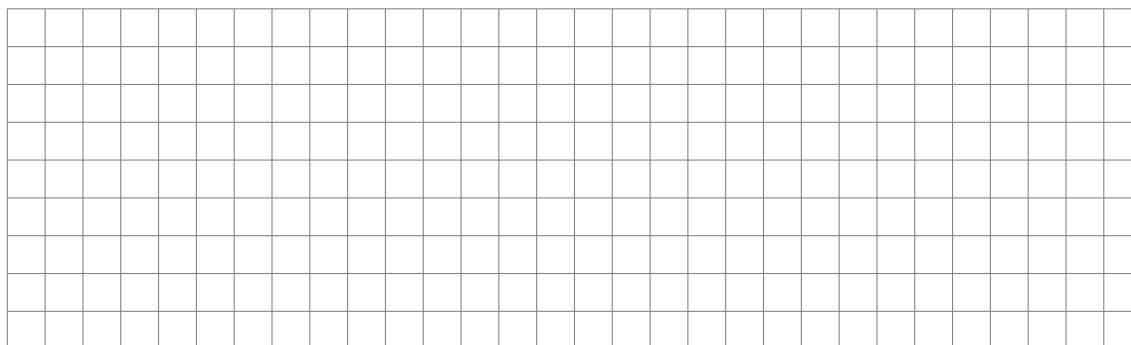
f est injective ssi f est surjective.

Remarque 2.9. Ce résultat est très utile pour montrer qu'une application linéaire en dimension finie est bijective : il suffit de vérifier que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, et que l'application est injective (par exemple).

Application 2.10. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(P) = (P(0), P(1), P(2))$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. f est-elle bijective ?



Théorème du rang

Théorème 2.11. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si E est de dimension finie, alors :

- $\text{Im}(f)$ est automatiquement de dimension finie ;
- $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$.

Application 2.12. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (5x + 12y + 11z - 49t, -3x - 8y - 5z + 27t, -3x - 9y - 3z + 24t, -x - 3y - z + 8t)$$

On admet que f est une application linéaire.

- [illegible]

On suppose ici que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies.

Application 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto X^2 P'' + P \end{cases}$.

- [illegible]

$$Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F}(f) = Mat_{(u_1, \dots, u_n)}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Proposition 3.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Alors, pour tout $x \in E$, on a :

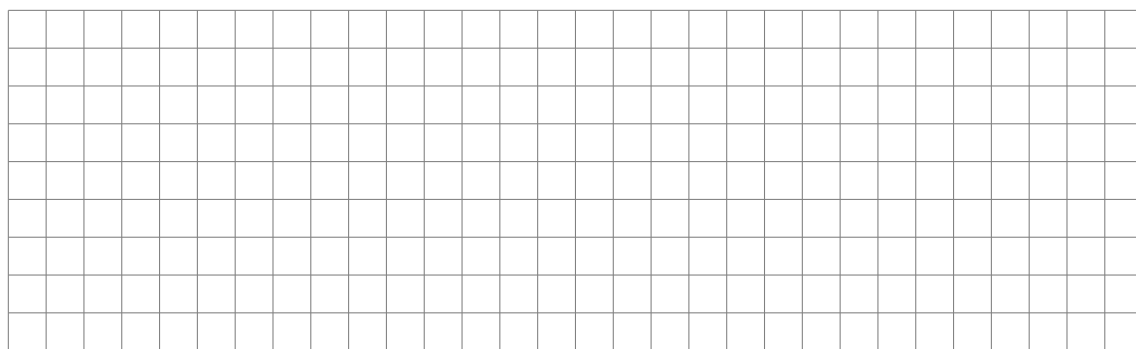
$$[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times [x]_{\mathcal{B}_E}$$

Proposition 3.5. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, et si $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F, G , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Proposition 3.6. Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi sa matrice A dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est inversible. Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de $f^{-1} : F \rightarrow E$ (dans les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E$) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))^{-1}$$



Invariance du rang par changement de base

Théorème 3.7. Le rang d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Proposition 3.8. Sur la matrice d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = (P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

Application 3.9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + y, z + 2x, z)$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. f est-elle un automorphisme ? Si c'est la cas, donner l'expression de $f^{-1}(x, y, z)$.
3. On admettra que $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.



Application 3.10. Soit $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

$$\text{Par convention } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k > n.$$

1. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant M pour matrice dans la base canonique.
2. En déduire que $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et déterminer M^{-1} .



4 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 4.1. Soit f un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est **stable** par f lorsque :

$$\forall u \in F, f(u) \in F$$

Définition 4.2. Soient des matrices carrées $A_1 \in \mathbb{M}_{p_1}(K), A_2 \in \mathbb{M}_{p_2}(K), \dots, A_k \in \mathbb{M}_{p_k}(K)$, et les O sont des matrices (en général rectangulaires) nulles, avec :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n.$$

Alors la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ est dite **diagonale par blocs**.

Matrice dans une base adaptée

Théorème 4.3. Soit φ un endomorphisme de E , $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E , stables par φ .

Si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$, alors, dans une base adaptée à cette somme

directe, la matrice de φ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

Remarque 4.4. Les A_i sont les matrices des restrictions de φ aux F_i , dans leurs bases respectives.

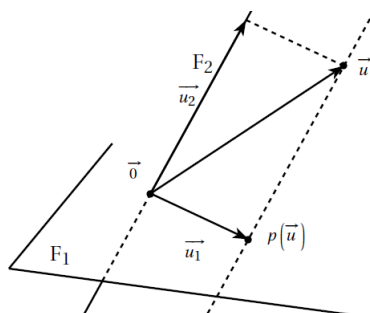
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

5.1 Projecteurs

Définition 5.1. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application :

$$f : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \rightarrow E \\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mapsto \vec{u}_1 \end{cases}$$



Proposition 5.2. Soit un projecteur p . Alors :

- p est un endomorphisme de E ;
- $p \circ p = p$;
- $\text{Ker}(p) = F_2$ et $\text{Im}(p) = F_1$

Caractérisation d'un projecteur

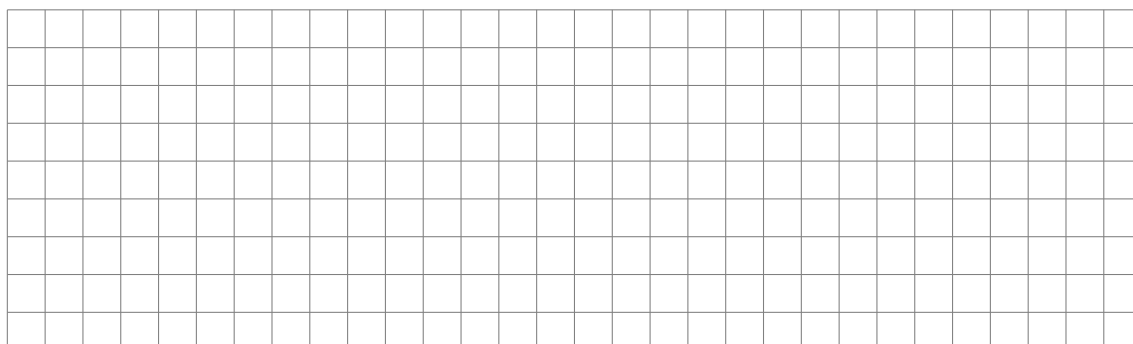
Théorème 5.3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

Dans ce cas, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$ et on a alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Application 5.4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f est un projecteur.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f .



Application 5.5. Soient $F = \text{Vect}(\{(1; -2, 1)\})$ et $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$. On admettra que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G .

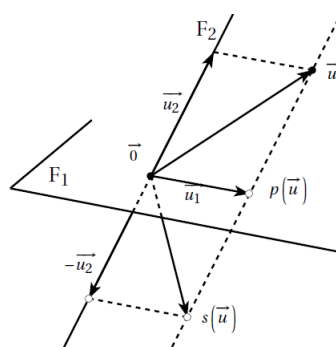


5.2 Symétries

Définition 5.6. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.

On appelle **symétrie vectorielle** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application s définie par :

$$s : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \rightarrow E \\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mapsto \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{cases}$$



Proposition 5.7. Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . Alors :

- $s \in \mathcal{L}(E)$
- $s \circ s = id_E$
- $F_1 = Ker(s - id_E) = \{ \vec{u} \in E, s(\vec{u}) = \vec{u} \}$ et
 $F_2 = Ker(s + id_E) = \{ \vec{u} \in E, s(\vec{u}) = -\vec{u} \}$
- $s \in GL(E)$ donc $Ker(s) = \{ \vec{0}_E \}$ et $Im(s) = E$

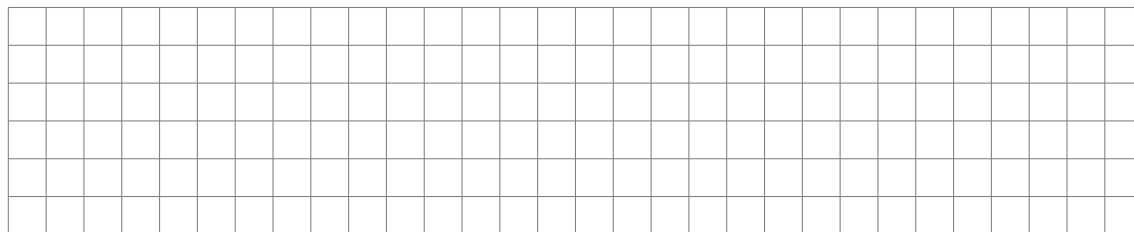
Proposition 5.8. *On note :*

- p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2
- q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1
- s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 .

Alors :

- $s = p - q$
- $s = 2p - id_E$
- $q = id_E - p$

Preuve :



Proposition 5.9. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

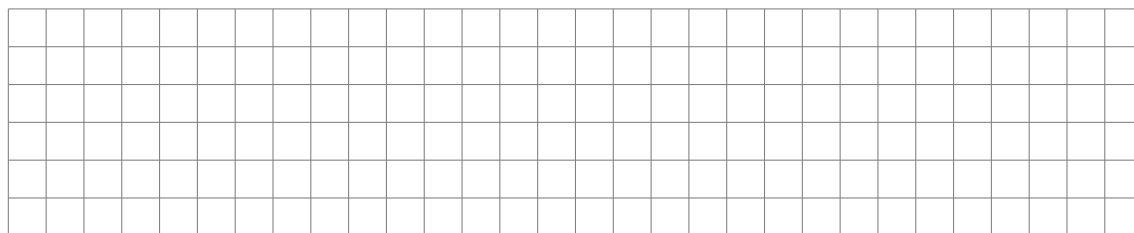
$$s \text{ est une symétrie vectorielle} \Leftrightarrow s \circ s = id_E$$

Plus généralement, une application vérifiant la relation $f \circ f = id$ est dite **involution**.

Application 5.10. *On admet que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ avec :*

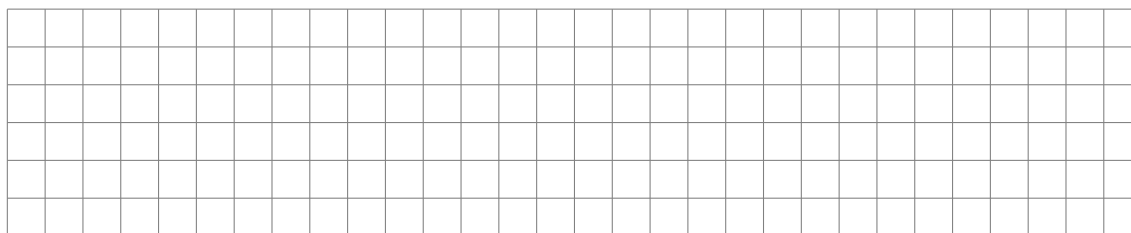
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = Vect(\{(1, 1, 1, 1)\})$$

Expliciter la symétrie par rapport à G parallèlement à F .



Application 5.11. *Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(-X) \end{cases}$.*

Démontrer que ϕ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.



Remarque 5.12. Supposons que $E = F \oplus G$.

Lorsqu'on réalise une projection sur F parallèlement à G , alors F est stable par cette projection.

On a la même chose pour la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Les matrices respectives selon des bases adaptées à la décomposition en somme directe seront donc diagonales par blocs.