
Programme de khôlle 2

Semaine du 14 septembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou code Python(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***nilpotente***(A) qui reçoit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en argument et qui renvoie le premier exposant entier $i \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$ tel que $A^i = 0_n$.
2. ***graphe***(a) qui reçoit un réel $a \in [-10; 10]$ en argument et qui affiche le graphe de la fonction sur $[-10; 10]$ de la fonction :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} |x - a| & \text{si } x \leq a \\ (x - a)^2 & \text{si } x > a \end{cases} \end{cases}$$

3. ***graphe***(a, b) qui reçoit un réel $a \in \mathbb{R}^*$ et un réel $b \in]0; 1[$ en arguments et qui affiche le graphe de la fonction sur $[-1; -b]$ ainsi que sur $[b; 1]$ de la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{\sin(ax)}{\sin(x)}$$

2 Pratique calculatoire

1. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?
 - (a) $\{f_1: x \mapsto 1, f_2: x \mapsto e^x, f_3: x \mapsto xe^{2x}\}$
 - (b) $\{f_1: x \mapsto \cos x, f_2: x \mapsto \cos 2x, f_3: x \mapsto \cos 3x, f_4: x \mapsto \cos 4x\}$
 - (c) $\{f_1: x \mapsto \cos x, f_2: x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{3}), f_3: x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})\}$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit les deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\} \text{ et } G = \{P \in E \mid P' = 0\}.$$

1. **Étude des sous-espaces**

- (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (b) Déterminer une base et la dimension de F .
- (c) Déterminer une base et la dimension de G .

2. **Somme directe**

- (d) Déterminer $F \cap G$.
- (e) Montrer que $E = F \oplus G$.

3. **Décomposition d'un polynôme** Soit

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

un polynôme quelconque de E .

- (f) Montrer que P peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$P = Q + R, \quad Q \in F, \quad R \in G.$$

- (g) Déterminer Q et R en fonction de P .
- (h) Appliquer le résultat au polynôme

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 + X + 5.$$

Déterminer explicitement Q et R .

Exercice 3.2. Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E
- 2. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E .

Exercice 3.3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes :

$$P_1 = X^2 + X, P_2 = X^2 - X \text{ et } P_3 = X^2 - 1.$$

- 1. Montrer que $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ puis celle de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
- 3. Montrer que, dans cette base $\mathcal{B}$, les coordonnées d'un polynôme P sont $\left(\frac{P(1)}{2}; \frac{P(-1)}{2}; -P(0)\right)$.
- 4. Quelles sont les coordonnées du polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$?

On procèdera selon deux méthodes distinctes.

4 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Rappels et compléments sur les matrices

2 Généralités sur les espaces vectoriels

2.1 Définition

2.2 Familles de vecteurs

2.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré

2.2.2 Familles génératrices

2.2.3 Familles libres

3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

4.1.1 Base

4.1.2 Dimension

5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Deux sous-espaces vectoriels

5.1.1 En dimension quelconque

5.1.2 En dimension finie

5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels

6 Hyperplans

Chap.2 : Applications linéaires

1 Définitions

2 Noyau et image