

Exercices

Chap.2 : Applications linéaires

Exercice 0.1. 1. Soit f l'application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie

par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix}$. Montrer que f est une application linéaire puis déterminer une base du noyau et de l'image de f .

2. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E , puis déterminer une base de leur noyau et de leur image.

(a) f est définie sur $E = \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (2x - y, 3x + y)$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés. f est définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $f(M) = AM - MA$.

Pour le noyau et l'image on prendra $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) f est définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + P$.

(d) f est définie sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = M + (b+c)I_2, \text{ où } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.2. Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques des espaces considérés :

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_1 - 4x_3 + 5x_5, -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_5)$$

2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X-1)P' + P$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par :

$$f(M) = AM.$$

On cherchera la matrice de f dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$

Exercice 0.3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E . Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de f .

2. Construire sa matrice représentative dans la base canonique.

3. (a) Sans expliciter $\ker(f - \text{id}_E)$, montrer que $\ker(f - \text{id}_E)$ est stable par f .
 (b) Déterminer $\ker(f - \text{id}_E)$ et en donner une base.
4. (a) Sans expliciter $\ker(f^2 + \text{id}_E)$, montrer que $\ker(f^2 + \text{id}_E)$ est stable par f .
 (b) Déterminer $\ker(f^2 + \text{id}_E)$ et en donner une base.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f^2 + \text{id}_E)$.
6. Déterminer la matrice représentative de f dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 0.4. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = z\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
2. Soit p la projection sur E parallèlement à F .
 Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit s la symétrie par rapport à E parallèlement à F .
 Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 0.5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la

$$\text{matrice : } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 0.6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n :

$$N_k = \ker(f^k) \text{ et } I_k = \text{Im}(f^k).$$

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p .
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p .
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 0.7. Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E , vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.