
Programme de khôlle 3

Semaine du 21 septembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou code Python(10 minutes).
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***coef_bino***(n, k) qui reçoit deux entiers en arguments et qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

2. ***Matrice***(n) qui reçoit un entier $n \geq 2$ en argument et qui renvoie la matrice $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

3. ***Matrice***(a, b) qui reçoit deux flottants en paramètres et qui renvoie

la matrice diagonale par bloc $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$

2 Pratique calculatoire

Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques des espaces considérés :

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 4x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3)$$

2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X+2)P' - 2P$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par :

$$f(M) = AM - MA.$$

On cherchera la matrice de f dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par :

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{ker}(u)$.
4. Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 3.2. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$$

et

$$G = \text{Vect}((1, -1, 0)).$$

On admet que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
On notera p la projection sur F parallèlement à G .
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G . On notera $\mathcal{B}$ la base adaptée à cette somme directe.
3. Donner une expression explicite de $p(x, y, z)$.
4. Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p)$ de p dans la base canonique.
5. (a) Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.
(b) Expliquer, sans effectuer de calcul, pourquoi cette matrice prend une forme particulièrement simple.

Exercice 3.3. Soient $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Posons $u_1 = (1, 4)$ et $u_2 = (1, 3)$.

1. Montrer que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathcal{B}'$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Préciser les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Préciser $f^2 = f \circ f$.

-
3. Préciser $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.
 4. Préciser les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
 5. Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) ?
 6. Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant ces matrices de passage.

4 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

- 1 Rappels et compléments sur les matrices
- 2 Généralités sur les espaces vectoriels
- 3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels
- 4 Dimension d'un espace vectoriel
- 5 Somme de sous-espaces vectoriels
- 6 Hyperplans

Chap.2 : Applications linéaires

- 1 Définitions
- 2 Noyau et image
- 3 Représentation matricielle
- 4 Sous-espaces stables par un endomorphisme
- 5 Endomorphismes remarquables
- 5.1 Projecteurs