

Interrogation 1 - CORRECTION

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère sa base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.
On considère les polynômes :

$$P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2 \text{ et } P_3 = 1 + 3X + 6X^2$$

On pose $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On sait que

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3.$$

Il suffit donc de montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

En développant, on obtient $\lambda_1(1 + X + X^2) + \lambda_2(1 + 2X + 3X^2) + \lambda_3(1 + 3X + 6X^2) = 0$.

Par identification des coefficients de 1, X et X^2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième, puis la deuxième de la troisième, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations : $\lambda_3 = 0$.

On en déduit $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre.

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$$

On avait :

NOM :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Son inverse vaut :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

]

3. Soit $P = 2 + 5X + 10X^2$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$.

$$(P)_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[P]_{\mathcal{B}}.$$

Ce qui donne :

$$(P)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 15 + 10 \\ -6 + 25 - 20 \\ 2 - 10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$$

et

$$G = \text{Vect}(1).$$

- (a) Déterminer une base de F .

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in F \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c.$$

$$P = (-b - c) + bX + cX^2 \Leftrightarrow P = b(X - 1) + c(X^2 - 1).$$

Par conséquent, $F = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$.

Les deux polynômes $X - 1$ et $X^2 - 1$ sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de F .

- (b) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $P \in F \cap G$.

Comme $P \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$.

Comme $P \in F$, on a $P(1) = 0$. Or $P(1) = \lambda$. donc $\lambda = 0$.

Ainsi

$$P = 0.$$

On a donc

$$\boxed{F \cap G = \{0\}}.$$

(c) En déduire que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

On a montré que $F \cap G = \{0\}$.

De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

On en déduit que $F + G = \mathbb{R}_2[X]$.

Comme, de plus, $F \cap G = \{0\}$, on obtient $\boxed{\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G}$.

5. Soit $P = 4 - 2X + 7X^2$. Déterminer $P_F \in F$ et $P_G \in G$ tels que $P = P_F + P_G$.

On cherche $P = P_F + P_G$ avec $P_F \in F$ et $P_G \in G$.

Comme $P_G \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_G = \lambda$.

On a alors $P_F = P - P_G = 4 - \lambda - 2X + 7X^2$.

Pour que $P_F \in F$, il faut que $P_F(1) = 0$.

Or $P_F(1) = 4 - \lambda - 2 + 7 = 9 - \lambda$ donc $\lambda = 9$.

On obtient donc

$$P_G = 9$$

et

$$P_F = P - 9 = -5 - 2X + 7X^2.$$

On vérifie bien que $P_F(1) = -5 - 2 + 7 = 0$.

Ainsi : $\boxed{P_F = -5 - 2X + 7X^2}$ et $\boxed{P_G = 9}$.

La décomposition est donc

$$\boxed{4 - 2X + 7X^2 = (-5 - 2X + 7X^2) + 9.}$$

6. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\boxed{f(P) = XP' - P},$$

où P' désigne la dérivée de P .

(a) Montrer que f est une application linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q).$$

Or la dérivation est linéaire, donc :

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$$

Ainsi,

$$f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P' + \mu Q') - \lambda P - \mu Q.$$

NOM :

D'où :

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(XP' - P) + \mu(XQ' - Q).$$

Finalement,

$$\boxed{f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q).}$$

L'application f est donc linéaire.

(b) Déterminer le noyau de f , en donner une base.

Soit

$$P = a + bX + cX^2.$$

, alors

$$P' = b + 2cX.$$

Par conséquent,

$$XP' = bX + 2cX^2.$$

Donc

$$f(P) = XP' - P = bX + 2cX^2 - (a + bX + cX^2).$$

Ainsi,

$$f(P) = -a + cX^2.$$

On cherche les polynômes P tels que

$$f(P) = 0.$$

Cela équivaut à

$$-a + cX^2 = 0.$$

Par identification des coefficients :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad c = 0.$$

Le coefficient b est quelconque.

Ainsi,

$$P = bX.$$

On obtient

$$\ker(f) = \text{Vect}(X).$$

NOM :

Une base du noyau est donc :

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \{X\}$$

et

$$\dim(\ker f) = 1.$$

(c) Déterminer l'image de f , en donner une base.

D'après la question précédente, $\dim(\ker f) = 1$.

Or $\dim(E) = 3$ donc, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E)$$

d'où : $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$

Or $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\{f(1), f(X), f(X^2)\})$

On calcule :

- $f(1) = X(1') - 1 = -1$
- $f(X) = X(X') - X = X - X = 0$
- $f(X^2) = X(2X) - X^2 = X^2$

Donc : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1, X^2)$ et $\{1, X^2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$

car 1 et X^2 ne sont pas colinéaires.