

Interrogation 1

Calculatrice autorisée

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère sa base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.
On considère les polynômes :

$$P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2 \text{ et } P_3 = 1 + 3X + 6X^2$$

On pose $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$.
3. Soit $P = 2 + 5X + 10X^2$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$.
4. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$$

et

$$G = \text{Vect}(1).$$

- (a) Déterminer une base de F .
 - (b) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
 - (c) En déduire que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$
5. Soit $P = 4 - 2X + 7X^2$.
Déterminer $P_F \in F$ et $P_G \in G$ tels que $P = P_F + P_G$.
6. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\boxed{f(P) = XP' - P},$$

où P' désigne la dérivée de P .

- (a) Montrer que f est une application linéaire.
- (b) Déterminer le noyau de f , en donner une base.
- (c) Déterminer l'image de f , en donner une base.