

Corrigé du Devoir Surveillé 1
Électronique Analogique : Lois de base, Filtrage et Equa diff

Nom :

Présentation/3

Total/ 60

1 Filtrage actif (Total : 20 points)

[3 pts] 1. Impédances complexes Z_1 et Z_2 :

- Branche d'entrée (association série de R_1 et C_1) :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}$$

- Branche de rétroaction (association parallèle de R_2 et C_2) :

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2} \implies \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

[4 pts] 2. Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$:

- ALI idéal en régime linéaire : $i^+ = i^- = 0$ et $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$. Comme la borne non-inverseuse est à la masse, $V^+ = 0$ V, d'où $V^- = 0$ V.
- Loi des nœuds au nœud inverseur (ou formule de l'amplificateur inverseur) :

$$\frac{v_e - V^-}{\underline{Z}_1} + \frac{v_s - V^-}{\underline{Z}_2} = 0 \implies \underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

- Remplacement et factorisation :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}}{\frac{1+jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}} = -\frac{R_2C_1j\omega}{(1 + R_1C_1j\omega)(1 + R_2C_2j\omega)}$$

[2 pts] 3. Justification du type passe-bande :

- Comportement basse fréquence : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = 0$.
- Comportement haute fréquence : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) \sim -\frac{R_2C_1j\omega}{(R_1C_1j\omega)(R_2C_2j\omega)} = -\frac{1}{R_1C_2j\omega} \rightarrow 0$.
- Le gain s'annule aux deux extrémités et passe par un maximum fini à pulsation intermédiaire : il s'agit donc bien d'un **filtre passe-bande**.

[1 pts] 4. Lecture de la fréquence propre f_0 :

- Présence des traits de construction verticaux au sommet du pic de gain sur le document réponse.
- Lecture : $f_0 \approx 5 \times 10^3$ Hz

[4 pts] 5. Lecture de la bande passante à -3 dB (Δf) :

- Trait horizontal tracé à $G_{\max} - 3$ dB ≈ -4 dB et projection des deux fréquences de coupure f_{c1} et f_{c2} .
- Lecture : $f_{c1} \approx 1,3 \times 10^3$ Hz, $f_{c2} \approx 2 \times 10^4$ Hz.
- Bande passante $\Delta f = f_{c2} - f_{c1} = (20 - 1,3) \times 10^3 = 18,7 \times 10^3$ Hz.

[3 pts] 6. Facteur de qualité Q et sélectivité :

- Pour un passe-bande, la bande passante est donnée par

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} \implies Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{5 \times 10^3}{18,7 \times 10^3} = 0,27$$

- Conclusion : $Q < 1$ (ou $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$), le filtre n'est **pas sélectif**.

[3 pts] 7. Amplitude du parasite réseau à 50 Hz : - Lecture du gain à 50 Hz : $G_{dB} \approx$

- -30 dB, d'où un gain linéaire $|H| = 10^{-30/20} = 0,0316$.
- Amplitude en sortie : $V_{s,parasite} = |H| \times V_{e,parasite} = 0,0316 \times 2$ V = 63 mV.

2 Comparateur à hystérésis (Total : 15 points)

[2 pts] 1. Régime de fonctionnement et règles associées :

- Boucle de réaction ramenée sur l'entrée non-inverseuse (+) $\Rightarrow$ réaction positive, donc **régime saturé**.
- La sortie ne prend que deux états : $v_s = +V_{\text{sat}} = +15 \text{ V}$ si $\varepsilon > 0$, et $v_s = -V_{\text{sat}} = -15 \text{ V}$ si $\varepsilon < 0$.

[3 pts] 2. Expression du potentiel V^+ :

- Application de la loi des noeuds en termes de potentiel à l'entrée +

$$\frac{v_e - V^+}{R_1} + \frac{v_s - V^+}{R_2} = i^+ = 0$$

$$V^+ = \frac{\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

- Mise sous forme simplifiée :

$$V^+ = \frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2}$$

[2 pts] 3. Bascule de v_s de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} :

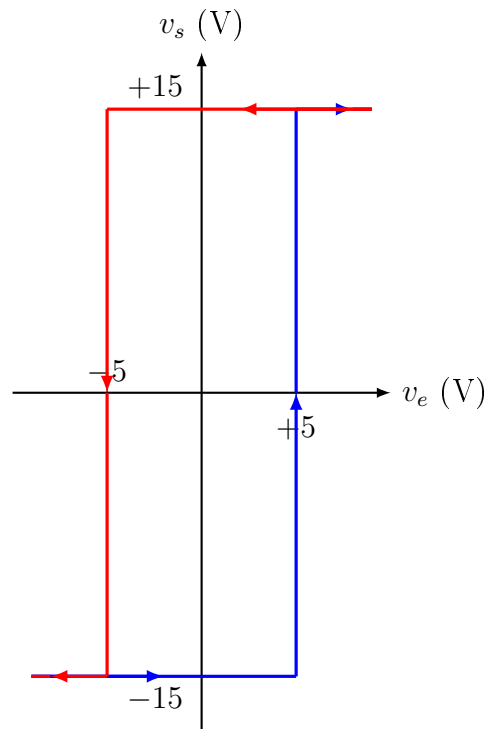
- Pour $v_s = -V_{\text{sat}}$, $\varepsilon = V^+ < 0 \Rightarrow v_e < \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_{\text{seuil}}$.
- La bascule a lieu lorsque v_e devient plus grand que V_{seuil} . Application numérique : $V_{\text{seuil}} = \frac{1}{3} \times 15 = 5 \text{ V}$.

[2 pts] 4. Bascule de v_s de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$:

- Pour $v_s = V_{\text{sat}}$, $\varepsilon = V^+ > 0 \Rightarrow v_e > -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = -V_{\text{seuil}}$.
- La bascule a lieu lorsque v_e devient plus petit que $-V_{\text{seuil}}$.

[3 pts] 5. Cycle d'hystérésis et largeur du cycle :

- Tracé du cycle $v_s = f(v_e)$: rectangle centré à l'origine avec flèches dans le sens trigonométrique (trigger non-inverseur).
- Largeur du cycle : $\Delta V = 2V_{\text{seuil}} = 10 \text{ V}$.



[3 pts] 6. Chronogramme de $v_s(t)$:

- Tracé des seuils horizontaux à $+5 \text{ V}$ et -5 V sur le graphique de $v_e(t)$.
- Signal rectangulaire propre $v_s(t) \in \{-15 \text{ V}, +15 \text{ V}\}$, commutant aux passages de seuils et éliminant le bruit de fond.

3 Capteur de pression (Total : 12 points)

[2 pts] 1. Pont équilibré ($R_p = R_0$) :

- Diviseurs de tension : $V_{BM} = \frac{R_0}{2R_0} E = \frac{E}{2}$ et $V_{AM} = \frac{R_0}{2R_0} E = \frac{E}{2}$.
- Tension différentielle : $U = V_{AM} - V_{BM} = 0$ V.

[2 pts] 2. Expressions de V_{BM} , V_{AM} et U :

- Branche fixe : $V_{BM} = \frac{E}{2}$.
- Branche jauge : $V_{AM} = \frac{R_p}{R_0 + R_p} E = \frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} E$.
- Différence :

$$U = V_{AM} - V_{BM} = \left(\frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} - \frac{1}{2} \right) E = \frac{\Delta R}{2(2R_0 + \Delta R)} E$$

[1 pt] 3. En divisant haut et bas par R_0 :

$$U = \frac{\frac{\Delta R}{R_0}}{2 \left(2 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)} E = \frac{\varepsilon}{2(2 + \varepsilon)} E = \frac{E}{4} \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$$

[2 pts] 4. Approximation au premier ordre :

- Développement au 1^{er} ordre : $\frac{1}{1 + \varepsilon/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
- En négligeant les termes d'ordre supérieur : $U \approx \frac{E}{4} \varepsilon$.

[1 pt] 5. Relation entre ΔP et U :

- Substitution $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0} = \alpha \Delta P$.
- Relation linéaire obtenue : $U = \frac{E}{4} \alpha \Delta P$.

[4 pts] 6. Montage amplificateur non-inverseur :

- ALI en régime linéaire ($V^+ = V^-$), $V^+ = U$, et par loi des noeuds en termes de potentiel ou diviseur de tension sur l'entrée inverseuse : $V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{\text{amp}}$.
- Fonction de transfert : $U_{\text{amp}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U$.
- Choix des résistances : $1 + \frac{R_2}{R_1} = 10 \implies R_2 = 9R_1$ (ex : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$).

4 Équations différentielles (Total : 10 points)

[2 pts] 1. Simplification pour $R_0 = r$ et dénomination :

- Pour $R_0 = r$, le coefficient d'amortissement s'annule :

$$\frac{r - R_0}{L} = 0$$

- L'équation différentielle se simplifie en :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0 \iff \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Il s'agit de l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique non amorti** (oscillations sinusoïdales libres à énergie constante).

[2 pts] Solution générale pour $R_0 = r$:

- L'équation caractéristique associée $X^2 + \frac{1}{LC} = 0$ possède deux racines imaginaires pures conjuguées :

$$X_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La solution générale s'écrit sous forme harmonique sinusoïdale d'amplitude constante :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où A et B (ou U_m et φ) sont des constantes réelles d'intégration déterminées par les conditions initiales.

[4 pts] 3. Solution générale pour $R_0 > r$:

- L'équation caractéristique associée est

$$X^2 + \frac{r - R_0}{L} X + \frac{1}{LC} = 0$$

$$X^2 + 2\alpha X + \omega_0^2 = 0$$

- Discriminant en régime pseudo-périodique

$$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) < 0$$

- Les racines complexes sont à partie réelle strictement positive : $r_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.
- La solution générale est une pseudo-oscillation à **amplitude exponentiellement croissante** car $\alpha < 0$:

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ la pseudo-pulsation.

[2 pts] 4. Commentaire physique et comportement de l'ALI :

- Commentaire : La croissance exponentielle traduit une instabilité en régime linéaire. Le montage à ALI fournit au circuit plus d'énergie que n'en dissipent les pertes Joule de la bobine : c'est la condition de démarrage de l'oscillateur.

- Comportement de l'ALI :

La tension $u_C(t)$ ne peut croître indéfiniment. Dès que la dynamique en sortie atteint la plage d'alimentation, l'**ALI sature** (écrêtage à $\pm V_{\text{sat}}$). Ces non-linéarités réduisent le gain effectif et stabilisent l'amplitude des oscillations à une valeur finie : on obtient ainsi un **régime permanent oscillatoire stable** (cycle limite).