
Programme de khôlle 4

Semaine du 28 septembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou code Python(10 minutes).
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. **Integrale**(n) qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
2. **Riemann**(n) qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}.$$
3. **Aleatoire**(n) qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie une matrice carrée de taille n dont les coefficients diagonaux sont des entiers aléatoires compris entre 2 et 20.

2 Pratique calculatoire

1. Calculer en utilisant une intégration par partie :
 - (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$
 - (b) $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} \, dt$
 - (c) $\int_0^1 t \arctan t \, dt$
2. Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.
 - (a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$ avec $t = \sin \theta$.
 - (b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \, dt$ avec $u = \sqrt{t}$.
 - (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t \, dt$ avec $u = \sin t$.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. On pose, pour tout $(x; y) \in \mathbb{K}^2$, $p(x; y) = \frac{1}{5}(x + 2y; 2x + 4y)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $G = \ker(p)$ et une base de $F = \text{Im}(p)$.
3. Montrer que $p \circ p = p$. Qu'en conclure ?
4. Exprimer la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 3.2. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((-1, 2, 1))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G .
3. Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

Exercice 3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$$

2. En déduire que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

3. Soit $g(x) = \sum_{k=1}^p a_k \cos(kx)$.

(a) Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, calculer $\int_0^{2\pi} g(t) \cos(jt) dt$.

(b) En déduire une formule permettant de déterminer a_j en fonction de g .

4 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.2 : Applications linéaires

- 1 Définitions
- 2 Noyau et image
- 3 Représentation matricielle
- 4 Sous-espaces stables par un endomorphisme
- 5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel
- 5.1 Projecteurs
- 5.2 Symétries.

Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation

-
- 1 Rappels sur les intégrales d'une fonction continue sur un segment
 - 1.1 Définition et lien avec les primitives
 - 1.2 Propriétés de l'intégrale
 - 1.3 Intégration par partie et changement de variable
 - 1.4 Sommes de Riemann, théorème de la moyenne