

Devoir Surveillé 1*Durée : 3 heures**Calculatrice interdite***Exercice 0.1.** Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : étant donné la question suivante, il semble plus pertinent

d'écrire F sous forme d'un Vect. Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement $3x - 2y + z = 0$ ce qui se réécrit $z = -3x + 2y$. Un vecteur de F est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et en particulier F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base et la dimension de F .

D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille gé-

nératrice de F . Montrons que cette famille est libre. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

tels que $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cela donne un système dont

les deux premières lignes sont $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ donc la famille est libre.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F et en particulier $\dim(F) = 2$ (cardinal de la base).

3. Mêmes questions pour $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$.

On procède comme aux questions précédentes avec cette fois un système.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à G si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{cases} y = -2x \\ x - 2x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Un élément de G est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$G = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(car ce vecteur est non nul) et en particulier $\dim(G) = 1$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On va utiliser la caractérisation $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}$.

- D'abord, d'après les deux questions précédentes, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

- Il reste donc à s'intéresser à $F \cap G$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$. Cela équivaut à :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \xleftrightarrow{L_3} L_3 + L_2} \begin{cases} 6x - y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \xleftrightarrow{L_3 + 2L_1}} \begin{cases} 6x - y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 16x = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z = 0$$

$$\text{donc } F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

L'autre inclusion étant triviale (intersection de sev), on obtient $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Bilan : On déduit de ces deux points que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

5. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe. Soit f la projection vectorielle sur F parallèlement à G .

- (a) Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
Une base adaptée à la décomposition est obtenue en mettant d'abord une base de F , puis une base de G . On peut donc prendre :

$$\mathcal{B} = ((1, 0, -3), (0, 1, 2), (1, -2, 1)).$$

On considère la projection vectorielle f sur F parallèlement à G .
Par définition :

- si $u \in F$, alors $f(u) = u$;
- si $u \in G$, alors $f(u) = 0$.

D'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

$$X = (x, y, z).$$

On cherche sa décomposition

$$X = u + v, \quad u \in F, \quad v \in G.$$

Écrivons :

$$u = a(1, 0, -3) + b(0, 1, 2) = (a, b, -3a + 2b)$$

et

$$v = t(1, -2, 1).$$

Donc :

$$(x, y, z) = (a + t, b - 2t, -3a + 2b + t).$$

On obtient :

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b - 2t \\ z = -3a + 2b + t. \end{cases}$$

De $a = x - t$ et $b = y + 2t$, on remplace dans la troisième équation :

$$z = -3(x - t) + 2(y + 2t) + t$$

$$\text{Donc } z = -3x + 2y + 8t \text{ et } t = \frac{z + 3x - 2y}{8}.$$

Or $f(X) = u = X - v$, donc :

$$f(x, y, z) = (x - t, y + 2t, z - t).$$

Après simplification :

$$f(x, y, z) = \left(\frac{5x + 2y - z}{8}, \frac{3x + 2y + z}{4}, \frac{-3x + 2y + 7z}{8} \right).$$

On peut donc lire la matrice dans la base canonique :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On doit montrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et que φ est linéaire.

- Montrons d'abord que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= P + (1 - X)P' \\ &= a + bX + cX^2 + (1 - X)(b + 2cX) \\ &= a + b + 2cX - cX^2 \in \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

- Montrons maintenant que φ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda [P + (1 - X)P'] + \mu [Q + (1 - X)Q'] \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \quad \text{donc } \varphi \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

- Comme φ est linéaire et va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule les images des éléments de la base canonique $\mathcal{B}$ et on les exprime dans cette base. On a

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 + (1 - X) \times 0 = 1 \\ \varphi(X) &= X + (1 - X) \times 1 = 1 \\ \varphi(X^2) &= X^2 + (1 - X) \times 2X = -X^2 + 2X\end{aligned}$$

Ainsi :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : on aurait aussi pu reprendre le calcul du début de la question 1 pour déterminer les images des éléments de $\mathcal{B}$ en prenant par exemple $a = b = 0$ et $c = 1$ pour calculer $\varphi(X^2)$.

3. L'application φ est-elle un isomorphisme ?
L'application φ est un isomorphisme (ou automorphisme) si et seulement si sa matrice dans une base est inversible. Comme ici la matrice M possède deux colonnes identiques, elle n'est pas inversible, on en déduit que φ n'est pas un isomorphisme.
4. Déterminer $\text{Ker}(M)$ et en déduire le noyau de φ . On précisera en particulier la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M) \iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2c = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi un élément de $\text{Ker}(M)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{d'où } \text{Ker}(M) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour déduire $\text{Ker}(\varphi)$ à partir de $\text{Ker}(M)$, remarquons que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ représente, dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, le poly-

nôme $a + bX + cX^2$. Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente le polynôme

$1 - X$ d'où $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\{1 - X\}$.

En particulier, comme $1 - X$ n'est pas le polynôme nul, on a $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$.

5. En déduire le rang de φ .

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker } \varphi) + \text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Or d'après la question précédente, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$ et d'après le cours $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, d'où $\text{rg}(\varphi) = 2$.

Exercice 0.3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - 4M + 3I_2$.

$$\text{On a } M^2 = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

D'où après calcul de la somme :

$$M^2 - 4M + 3I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_2 et M .

D'après la question précédente, on a :

$$M^2 - 4M = -3I_2$$

d'où en divisant par -3 :

$$\frac{-1}{3}M^2 + \frac{4}{3}M = I_2$$

ce qui se réécrit :

$$M \times \left(\frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}I_2 \right) = I_2.$$

Ainsi, M est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}I_2.$$

3. Question de cours : rappeler le théorème de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B .

Soient A et B deux polynômes avec B non nul.

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels a_n et b_n tels que :

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + a_nX + b_n.$$

En appliquant le théorème de la division euclidienne dans le cas $A = X^n$ et $B = X^2 - 4X + 3$, on obtient qu'il existe un unique couple

de polynômes (Q, R) tel que $X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < 2$.

En particulier, R est de la forme $R(X) = a_n X + b_n$ pour deux réels a_n et b_n .

5. En évaluant la relation précédente en $X = 1$ et en $X = 3$, déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n .

Pour $X = 1$, on obtient $1 = 0 + a_n + b_n$ et pour $X = 3$, on a $3^n = 0 + 3a_n + b_n$.

On résout alors le système formé par ces deux équations :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n = 3^n - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{3^n - 1}{2} \\ b_n = 1 - a_n = \frac{3 - 3^n}{2} \end{cases}$$

6. En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + \frac{3^n - 1}{2}X + \frac{3 - 3^n}{2} \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X].$$

En prenant cette égalité en $X = M$, grâce à la question Q1, il vient

$$M^n = 0_2 + \frac{3^n - 1}{2}M + \frac{3 - 3^n}{2}I_2 \stackrel{\text{calculs}}{=} \left(\begin{pmatrix} 2 - 3^n & 2(3^n - 1) \\ 1 - 3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix} \right).$$