

Devoir Surveillé 1

Durée : 3 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Mêmes questions pour $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe. Soit f la projection vectorielle sur F parallèlement à G .
 - (a) Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
 - (b) Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 0.2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. L'application φ est-elle un isomorphisme ?
4. Déterminer $\text{Ker}(M)$ et en déduire le noyau de φ . On précisera en particulier la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.
5. En déduire le rang de φ .

Exercice 0.3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - 4M + 3I_2$.
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_2 et M .
3. Rappeler le théorème de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels a_n et b_n tels que :

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + a_nX + b_n.$$

5. *En évaluant la relation précédente en $X = 1$ et en $X = 3$, déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n .*
6. *En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*