

Exercices

Chap.5 : Séries numériques

1 Nature et somme d'une série

Exercice 1.1. En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum e^{-3n}$
3. $\sum_{n \geq 2} v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$
4. $\sum n(n+1)$
5. $\sum_{n \geq 2} w_n$ avec : $w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
6. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$
7. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 1.2. 1. Trouver trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+3}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. En déduire la nature et la somme de la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.
4. Sur le même modèle déterminer la nature et la somme de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

Exercice 1.3. Utilisation des critères de convergence

Déterminer la nature des séries suivantes (on pourra faire appel à toutes les techniques du chapitre...) :

1. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
2. $\sum_{n \geq 1} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
5. $\sum (-1)^n n e^{-n}$
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2 + \ln(n)}$
7. $\sum_{n \geq 1} \frac{n! n^n}{(2n)!}$
8. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
9. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$
10. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} \cos(n) + (-1)^n \ln(n)}{n^2}$
11. $\sum \frac{(-1)^n}{2n+3}$

Exercice 1.4. 1. Montrer que $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Exercice 1.5. A l'aide des développements limités déterminer un équivalent simple (de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$) de chacun des termes généraux des séries suivantes puis déterminer la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = 3 \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n^3 + 1)$
2. $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$;
3. $\sum_{n \geq 1} w_n$ avec $w_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

2 Critère spécial des séries alternées

Exercice 2.1. 1. Montrer que la série :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$

est convergente.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$$

4. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

5. Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3} .

3 Exercices complets

Exercice 3.1. On pose, pour tout n entier ≥ 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad ; \quad a_n = S_n - \ln(n) \quad ; \quad b_n = S_n - \ln(n+1)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. **Indication** : penser à l'inégalité des accroissements finis.
2. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note γ leur limite commune. (γ s'appelle la constante d'Euler)
(b) Montrer que $\gamma > 0$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Cette égalité s'appelle le **développement asymptotique de la série harmonique**.

Exercice 3.2. Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Donner une expression explicite de v_n .
2. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.
3. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ est convergente.
4. Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n} \quad \textbf{Formule de Stirling}$$

Exercice 3.3. Soit $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$: \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{\lambda n + 1}.$$

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Vérifier que pour tout entier n , $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n} dt$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda} + r_n$ en précisant la valeur de r_n .
(b) En utilisant le fait que $\frac{t^{\lambda(n+1)}}{1+t^\lambda} \leq t^{\lambda(n+1)}$ pour tout $t \in [0; 1]$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.
(c) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}.$$

4. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4 Pour aller plus loin...

Exercice 4.1. On considère une série $\sum_{n \geq 1} u_n$ à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, on pose : $v_n = \ln \left((n+1)^\beta u_{n+1} \right) - \ln \left(n^\beta u_n \right)$.
Donner les valeurs de β telles que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$.
3. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$ en fonction de la valeur de α .

Il s'agit du **critère de Raabe-Duhamel**.