
Programme de khôlle 7

Semaine du 9 novembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***Approximation(epsilon)*** qui reçoit en argument un flottant et qui renvoie le premier entier $n \geq 2$ tel que $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$ soit une valeur

approchée de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$ à *epsilon* près.

2. ***Ecriture_deci(n)*** prenant en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant par le calcul la valeur de $x_n = 2,56242424\dots 24$ où 24 se répète n fois.
3. ***Vandermonde(L)*** qui reçoit en argument une liste $L = [a_1, \dots, a_n]$ de n flottants et qui renvoie $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

2 Pratique calculatoire

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ | 5. $\sum_{n \geq 2} w_n$ avec : |
| 2. $\sum e^{-2n+4}$ | $w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 2} v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$ | 6. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$ |
| 4. $\sum n(n+1)$ | 7. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ |

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.
2. Encadrer $S(a)$ avec des intégrales pour tout $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.2. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et calculer son déterminant :

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \text{ définie par } \varphi(P) = Q,$$

où Q est le polynôme tel que $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$

Exercice 3.3. On s'intéresse dans cet exercice à la suite (S_n) définie pour $n \geq 2$ par :

$$S_n = \frac{1}{2 \ln(2)} + \dots + \frac{1}{n \ln(n)}$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$.
2. Établir que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

3. Déduire de la question précédente un encadrement de S_n pour $n \geq 2$.
4. Démontrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$?

Chap.4 : Déterminants

- 1 Déterminant d'une matrice carrée
- 2 Calcul de déterminant
- 3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

Chap.5 : Séries numériques

1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions

1.2 Séries télescopiques

1.3 Propriétés

1.4 Convergence absolue

2 Séries de référence

2.1 Série géométrique

2.2 Séries de Riemann

3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs

3.1 Majoration des sommes partielles

3.2 Critère de comparaison

3.3 Critère des équivalents

3.4 Règle de D'Alembert

3.5 Une comparaison série-intégrale

3.6 Critère spécial des séries alternées

4 Développement décimal d'un nombre réel

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

1.2 Sous-espaces propres

1.3 Polynôme caractéristique

1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

2 Les propriétés utiles des éléments propres

2.1 Autour des valeurs propres

2.2 Autour des vecteurs propres

2.3 Autour des sous-espaces propres