

Interrogation 2 - CORRECTION

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels f est continue.
La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt$. On pourra faire une intégration par parties sur le segment $[1; x]$ avec $x > 1$.

La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

On effectue une intégration par parties sur le segment $[1; x]$, (où $x > 1$ est fixé) :

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t)dt &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$ ($\arctan$ étant bornée par $\frac{\pi}{2}$), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}dt$ existe dans $\mathbb{R}$.

Les intégrales impropres $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt$ sont donc de même nature.

3. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Pour tous réels a, b, c , on a :

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} = \frac{(a+b)t+ct+a}{t(1+t^2)}$$

donc cette fraction est égale à $\frac{1}{t(1+t^2)}$ pour tout t si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } (a; b; c) = (1; -1; 0).$$

On a donc :

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

4. En déduire que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et calculer sa valeur.

La décomposition précédemment obtenue permet de calculer $\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt$:

$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{\ln(2)}{2}.$$

Enfin, on passe à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) &= \ln(x) - \frac{1}{2} \left(\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2},$$

ce qui montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

5. Sans utiliser la décomposition de la Q.3, pouvait-on prévoir que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge ? Comment ?

Oui, on peut prévoir la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$, car f est continue sur $[1; +\infty[$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{t^2} > 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

6. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$.

On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} > 0$, et $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, donc d'après le critère des équivalents, $\int_0^1 f(t)dt$ diverge.

7. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Puisque l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ diverge, on en déduit que l'intégrale doublement impropre :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

diverge (somme d'une intégrale impropre divergente et d'une intégrale impropre convergente).

Exercice 0.1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

NOM :

1. Calculer $\Delta = \det(M)$ et donner le résultat sous forme factorisée.
 2. À quelle(s) condition(s) sur (a, b, c, d) la matrice M est-elle inversible ?
1. On effectue les opérations suivantes sur les lignes, de bas en haut, ce qui ne modifie pas le déterminant :

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_3, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

On obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\Delta = a(b-a)(c-b)(d-c)}.$$

2. La matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Un produit de réels est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\Delta = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = a \text{ ou } c = b \text{ ou } d = c.$$

De manière équivalente, M est inversible si et seulement si

$$a \neq 0, \quad a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq d.$$

Remarquons que l'on peut avoir $a = c$ ou $b = d$ sans que Δ s'annule.