Concours Blanc

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Consignes. La qualité de la rédaction et la justification des résultats sont prises en compte. Toute affirmation de convergence doit être justifiée par un critère adapté. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Intégrales impropres (5 points)

Partie A – Intégrales de référence

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier, suivant les valeurs de a, la convergence de :

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^a}\, dx.$$

Indication : on pourra procéder par IPP.

2. Lorsque cette intégrale converge, calculer $I(a)$.
3. Étudier la convergence de :

$$J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}\, dx.$$

Calculer $J(a)$ dans le cas où elle converge.

Partie B – Une intégrale à paramètre

Pour tout réel a, on considère :

$$K(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{1+x}\, dx.$$

4. Déterminer les réels a pour lesquels $K(a)$ converge.
5. Montrer que, pour $a > -1$,

$$K(a) = \int_0^1 x^a\, dx - \int_0^1 \frac{x^{a+1}}{1+x}\, dx,$$

et en déduire une relation entre $K(a)$ et $K(a+1)$.

6. Calculer $K(0)$ puis $K(1)$.
7. On pose $L = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}, dx$.

(a) Justifier la convergence de cette intégrale impropre.

(b) Pour tout entier $N \geq 0$ et tout $x \in [0, 1[$, établir l'identité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{N+1} x^{N+1}}{1+x}$$

(c) En déduire que, pour tout entier $N \geq 0$:

$$L = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln x dx + R_N \text{ avec}$$

$$R_N = (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1} \ln x}{1+x}, dx$$

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x, dx$, puis montrer que $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$

(e) Établir finalement que $L = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 2 – Séries numériques (5 points)

Partie A – Étude de convergence

On considère les séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

1. Étudier la convergence de chacune des trois séries.
2. Pour la deuxième série, préciser si la convergence est absolue.

Partie B – Série dépendant d'un paramètre

Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

3. Étudier la convergence de S_p suivant les valeurs de p.
   Indication : on pourra utiliser le critère de comparaison série-intégrale puis le changement de variable $t = ln(x)$

Partie C – Série télescopique

On considère :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

4. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

5. En déduire la nature de la série et calculer sa somme.
6. Calculer le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et donner un équivalent lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 3 – Déterminants (5 points)

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A – Calcul du déterminant

1. Calculer $\det A(a)$ par opérations élémentaires.
2. Factoriser le résultat.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $A(a)$ est inversible.
4. Pour les valeurs de a rendant $A(a)$ non inversible, déterminer le rang de $A(a)$.

Partie B – Inverse d'une matrice On suppose $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

5. Montrer que $A(a) = (1-a)I_3 + aJ$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
6. Calculer J^2, puis déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A(a)^{-1} = \alpha I_3 + \beta J$.

Partie C – Système linéaire On considère

$$\begin{cases} x + ay + az = 1, \\ ax + y + az = 1, \\ ax + ay + z = 1. \end{cases}$$

8. Pour quelles valeurs de a le système admet-il une unique solution ?
9. Pour $a \neq 1, -\frac{1}{2}$, résoudre le système.
10. Étudier le système pour $a = 1$, puis pour $a = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4 – Endomorphisme et projection dans $\mathbb{R}_3[X]$

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On pose

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}_0[X],$$

où G désigne le sous-espace des polynômes constants.

On définit l'application $p : E \to E$ par

$$\boxed{p(P) = P - P(1).}$$

Partie A – Étude de deux sous-espaces

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces F et G.
3. Déterminer $F \cap G$. En déduire que F et G sont en somme directe.
4. Montrer que $E = F \oplus G$.

Partie B – Étude de l'endomorphisme p

5. Montrer que p est un endomorphisme de E.
6. Déterminer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
7. Montrer que $p \circ p = p$.
8. En déduire que p est un projecteur. Préciser son image et sa direction.

Partie C – Une base adaptée

On considère la famille

$$\mathscr{B}' = (1,\ X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1)^3).$$

9. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = G \oplus F$.
10. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$.
11. Retrouver, à l'aide de cette matrice, les dimensions de $\ker(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$.

Partie D – Matrice dans la base canonique

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

12. Calculer $p(1)$, $p(X)$, $p(X^2)$ et $p(X^3)$.
13. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathscr{B}$.
14. Soit
$$P(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 4.$$
Calculer $p(P)$ et écrire P comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.