# Concours Blanc

**CORRECTION** ***Durée : 4 heures***

***Calculatrice interdite***

**Consignes.** La qualité de la rédaction et la justification des résultats sont prises en compte. Toute affirmation de convergence doit être justifiée par un critère adapté. Les exercices sont indépendants.

## Exercice 1 – Intégrales impropres (5 points)

**Partie A – Intégrales de référence**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier, suivant les valeurs de $a$, la convergence de
$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^a}\, dx.$$
2. Lorsque cette intégrale converge, calculer $I(a)$.
3. Étudier la convergence de
$$J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}\, dx.$$
Calculer $J(a)$ dans le cas où elle converge.

**Partie B – Une intégrale à paramètre**

Pour tout réel $a$, on considère :
$$K(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{1+x}\, dx.$$
4. Déterminer les réels $a$ pour lesquels $K(a)$ converge.
5. Montrer que, pour $a > -1$,
$$K(a) = \int_0^1 x^a\, dx - \int_0^1 \frac{x^{a+1}}{1+x}\, dx,$$
et en déduire une relation entre $K(a)$ et $K(a+1)$.
6. Calculer $K(0)$ puis $K(1)$.
7. On pose $L = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}, dx$.
   (a) Justifier la convergence de cette intégrale impropre.
   (b) Pour tout entier $N \geq 0$ et tout $x \in [0, 1[$, établir l'identité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{N+1} x^{N+1}}{1+x}$$

(c) En déduire que, pour tout entier $N \geq 0$ :

$$L = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^n \ln x dx + R_N \text{ avec}$$

$$R_N = (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1} \ln x}{1+x}, dx$$

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x, dx$, puis montrer que $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$

(e) Établir finalement que $L = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

## Exercice 2 – Séries numériques (5 points)

### Partie A – Étude de convergence

On considère les séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

1. Étudier la convergence de chacune des trois séries.
2. Pour la deuxième série, préciser si la convergence est absolue.

### Partie B – Série dépendant d'un paramètre

Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

4. Étudier la convergence de $S_p$ suivant les valeurs de $p$.

### Partie C – Série télescopique

On considère :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

5. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

6. En déduire la nature de la série et calculer sa somme.
7. Calculer le reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et donner un équivalent lorsque $N \to +\infty$.

## Exercice 3 – Déterminants

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

**Partie A – Calcul du déterminant**

1. Calculer $\det A(a)$ par opérations élémentaires.
2. Factoriser le résultat.
3. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $A(a)$ est inversible.
4. Pour les valeurs de $a$ rendant $A(a)$ non inversible, déterminer le rang de $A(a)$.

**Partie B – Inverse d'une matrice** On suppose $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

5. Montrer que $A(a) = (1-a)I_3 + aJ$, où $J$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
6. Calculer $J^2$, puis déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A(a)^{-1} = \alpha I_3 + \beta J$.

**Partie C – Système linéaire** On considère

$$\begin{cases} x + ay + az = 1, \\ ax + y + az = 1, \\ ax + ay + z = 1. \end{cases}$$

8. Pour quelles valeurs de $a$ le système admet-il une unique solution ?
9. Pour $a \neq 1, -\frac{1}{2}$, résoudre le système.
10. Étudier le système pour $a = 1$, puis pour $a = -\frac{1}{2}$.

## Exercice 4 – Endomorphisme et projection dans $\mathbb{R}_3[X]$

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On pose

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}_0[X],$$

où $G$ désigne le sous-espace des polynômes constants.

On définit l'application $p : E \to E$ par

$$\boxed{p(P) = P - P(1).}$$

## Partie A – Étude de deux sous-espaces

1. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces $F$ et $G$.
3. Déterminer $F \cap G$. En déduire que $F$ et $G$ sont en somme directe.
4. Montrer que $E = F \oplus G$.

## Partie B – Étude de l'endomorphisme $p$

5. Montrer que $p$ est un endomorphisme de $E$.
6. Déterminer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
7. Montrer que $p \circ p = p$.
8. En déduire que $p$ est un projecteur. Préciser son image et sa direction.

## Partie C – Une base adaptée

On considère la famille

$$\mathscr{B}' = (1,\ X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1)^3).$$

9. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $E$ adaptée à la décomposition $E = G \oplus F$.
10. Déterminer la matrice de $p$ dans la base $\mathscr{B}'$.
11. Retrouver, à l'aide de cette matrice, les dimensions de $\ker(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$.

## Partie D – Matrice dans la base canonique

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $E$.

12. Calculer $p(1)$, $p(X)$, $p(X^2)$ et $p(X^3)$.
13. Déterminer la matrice $M$ de $p$ dans la base $\mathscr{B}$.
14. Soit
$$P(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 4.$$
Calculer $p(P)$ et écrire $P$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.

## Correction de l'exercice 1

1. On pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$I_\varepsilon(a) = \int_\varepsilon^1 x^{-a} \ln x dx$$

1. Cas $a \neq 1$
On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \Longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}, \\ v'(x) = x^{-a} \Longrightarrow v(x) = \dfrac{x^{1-a}}{1-a}. \end{cases}$$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(a) &= \left[\frac{x^{1-a}\ln x}{1-a}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{1-a}\int_\varepsilon^1 x^{-a}dx \\ &= -\frac{\varepsilon^{1-a}\ln\varepsilon}{1-a} - \frac{1-\varepsilon^{1-a}}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

- Si $a < 1$, alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-a}\ln\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-a} = 0$$

Par conséquent :

$$I(a) = -\frac{1}{(1-a)^2}$$

- **Si $a > 1$, alors :**

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-a}\ln\varepsilon = -\infty.$$

Donc :

$$I(a) = -\infty.$$

**2. Cas $a = 1$**
On a :

$$I_\varepsilon(1) = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x} dx$$

Or :

$$I_\varepsilon(1) = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{(\ln \varepsilon)^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon(1) = -\infty.$$

Conclusion :

$$\begin{cases} I(a) \text{ converge et vaut } -\frac{1}{(1-a)^2}, & a < 1, \\ I(a) \text{ diverge vers } -\infty, & a \geq 1. \end{cases}$$

2. Cf. ci dessus.
3. À l'infini, $\ln x / x^a$ est positive. L'intégrale converge si et seulement si $a > 1$. Pour $a > 1$, l'intégration par parties donne :

$$J(a) = \left[-\frac{x^{1-a}\ln x}{a-1}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{a-1}\int_1^{+\infty} x^{-a}\,dx = \boxed{\frac{1}{(a-1)^2}}.$$

4. Près de 0, $\frac{1}{1+x}$ est équivalent à 1. La convergence de $K(a)$ est donc celle de $\int_0^1 x^a\,dx$, soit

$$\boxed{a > -1}.$$

5. L'identité $\frac{x^a}{1+x} = x^a - \frac{x^{a+1}}{1+x}$ donne, pour $a > -1$,

$$\boxed{K(a) + K(a+1) = \frac{1}{a+1}}.$$

6. On a $K(0) = \int_0^1 (1+x)^{-1} dx = \ln 2$. Puis

$$K(1) = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \boxed{1 - \ln 2}.$$

La relation donne bien $K(0) + K(1) = 1$.

7. On pose

$$L = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx.$$

(a) **Convergence de l'intégrale.**
Pour tout $x \in ]0, 1]$, on a $1 + x \geq 1$, donc

$$\left|\frac{\ln x}{1+x}\right| \leq |\ln x|.$$

Or l'intégrale

$$\int_0^1 |\ln x|\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx = 1$$

converge. Par comparaison, l'intégrale définissant $L$ converge absolument.

(b) **Identité géométrique finie.**
Pour tout entier $N \geq 0$ et tout $x \in [0,1[$, la formule de la somme géométrique donne

$$\sum_{n=0}^{N}(-x)^n = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n + \frac{(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x}.}$$

(c) **Expression de $L$ à l'aide d'une somme finie.**
En multipliant l'identité précédente par $\ln x$, puis en intégrant sur $]0,1[$, on obtient

$$L = \int_0^1 \ln x \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\right) dx + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}\ln x}{1+x}\,dx.$$

La somme étant finie, on peut permuter somme et intégrale. En posant

$$R_N = (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}\ln x}{1+x}\,dx,$$

il vient

$$\boxed{L = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^n \ln x\,dx + R_N.}$$

(d) **Calcul de l'intégrale et limite du reste.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties sur $[\varepsilon,1]$, avec $\varepsilon > 0$, donne

$$\int_\varepsilon^1 x^n \ln x\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n\,dx.$$

Or

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}.$$

On en déduit

$$\boxed{\int_0^1 x^n\ln x\,dx=-\frac{1}{(n+1)^2}.}$$

Par ailleurs, puisque $1+x\geq 1$ sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}|R_N|&=\left|\int_0^1\frac{x^{N+1}\ln x}{1+x}\,dx\right|\\&\leq\int_0^1 x^{N+1}|\ln x|\,dx\\&=-\int_0^1 x^{N+1}\ln x\,dx\\&=\frac{1}{(N+2)^2}.\end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{(N+2)^2}=0,$$

Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}R_N=0.}$$

(e) **Expression de $L$ sous forme de série.**
En remplaçant les intégrales par leur valeur obtenues en questions 7c et 7d, on trouve :

$$L=-\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}+R_N.$$

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$ et en utilisant $R_N\to 0$, il vient

$$L=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

En effectuant le changement d'indice $k=n+1$, on obtient finalement

$$\boxed{L=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.}$$

## Correction de l'exercice 2

**1.** Pour $u_n = \frac{cn}{n^3+1}$, on a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$, donc la série converge.
La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le CSSA, car $1/\sqrt{n}$ décroît vers 0.
Enfin, $\ln n/n^2$ est positive et la série converge, par exemple par comparaison intégrale avec $\int_2^\infty \frac{ln(x)}{x^2} dx < \infty$.

**2.** La série alternée n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1/2). Elle est donc **semi convergente**.

**3.** La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(ln(x))^p}$ est positive et décroissante à partir d'un rang convenable. Par le critère intégral,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}, \quad t = \ln x.$$

Cette intégrale converge exactement lorsque $p > 1$. Ainsi

$$\boxed{S_p \text{ converge si et seulement si } p > 1.}$$

**4.** La décomposition en éléments simples est

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}}.$$

**5.** En sommant jusqu'à $N$, les termes se télescopent :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$

La série converge et sa somme vaut

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

**6.** En appliquant la même formule à la queue de série,

$$R_N = \lim_{M\to\infty} \left( \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{2(M+2)} + \frac{1}{M+1} - \frac{1}{2M} \right),$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{R_N = \frac{1}{2(N+1)(N+2)}}.$$

Par conséquent, $R_N \sim \frac{1}{2N^2}$.

## Correction de l'exercice 3

**1.** En remplaçant la deuxième et la troisième ligne par leur différence avec la première, on obtient

$$\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a-1 & 1-a & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2(1+2a).$$

**2.** Ainsi $\boxed{\det A(a) = (1-a)^2(1+2a)}$.

**3.** La matrice est inversible si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

**4.** Pour $a = 1$, $A(1) = J$ est de rang 1.
Pour $a = -\frac{1}{2}$, les lignes sont non nulles et la somme des lignes est nulle ; deux lignes sont indépendantes, donc le rang vaut 2.

**5.** La diagonale de $(1-a)I_3 + aJ$ vaut $1 - a + a = 1$, et les coefficients hors diagonale valent $a$.
L'égalité est établie.

**6.** Chaque coefficient de $J^2$ vaut 3, donc $J^2 = 3J$. Posons $A^{-1} = \alpha I_3 + \beta J$. Alors :

$$A(\alpha I_3 + \beta J) = (1-a)\alpha I_3 + \big((1-a)\beta + a\alpha + 3a\beta\big)J.$$

On doit avoir $(1-a)\alpha = 1$ et $(1+2a)\beta + a\alpha = 0$. Ainsi

$$\alpha = \frac{1}{1-a}, \qquad \beta = -\frac{a}{(1-a)(1+2a)},$$

et

$$\boxed{A(a)^{-1} = \frac{1}{1-a}I_3 - \frac{a}{(1-a)(1+2a)}J}.$$

**7.** Le système a une unique solution si et seulement si sa matrice est inversible, soit $a \neq 1, -\frac{1}{2}$.

**8.** 1. Soustrayons les équations deux à deux.

En faisant (1) - (2) :

$$(1-a)(x-y) = 0$$

En faisant (2) - (3) :

$$(1-a)(y-z) = 0$$

$a \neq 1$ donc :

$$x - y = 0, \quad y - z = 0$$

Donc :

$$x = y = z$$

En remplaçant dans la première équation :

$$x + 2ax = 1$$
$$(1 + 2a)x = 1$$

Or $a \neq -\frac{1}{2}$, donc :

$$x = y = z = \frac{1}{1 + 2a}$$

**9.** Si $a = 1$, les trois équations se réduisent à $x + y + z = 1$ : il existe une infinité de solutions, le plan correspondant.
Si $a = -\frac{1}{2}$, la somme des trois équations donne $0 = 3$, contradiction. Il n'y a donc aucune solution.

## Correction détaillée de l'exercice 4

### Partie A – Étude de deux sous-espaces

**1. Sous-espaces vectoriels.** L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P) = P(1)$$

est linéaire. On a $F = \ker(\varphi)$, donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

L'ensemble $G$ des polynômes constants est également un sous-espace vectoriel de $E$.

**2. Bases et dimensions.** Si $P \in F$, alors $P(1) = 0$. Le polynôme $P$ est donc divisible par $X - 1$. Il existe ainsi $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P(X) = (X-1)Q(X) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1)$$

Par conséquent,

$$F = \text{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), (X-1)).$$

Les trois polynômes étant linéairement indépendants (car échelonnés en degrés), une base de $F$ est :

$$\mathscr{B}_F = (X-1, (X-1)^2, (X-1)^3), \qquad \dim F = 3.$$

Une base de $G$ est $\mathscr{B}_G = (1)$, donc

$$\dim G = 1.$$

**3. Intersection et somme directe.** Soit $P \in F \cap G$. Comme $P \in G$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = c$. Comme $P \in F$, on a $P(1) = c = 0$. Ainsi,

$$F \cap G = \{0\}.$$

La somme $F + G$ est donc directe :

$$F \oplus G.$$

**4. Décomposition de $E$.** On sait que $\dim E = 4$. Or

$$\dim F + \dim G = 3 + 1 = 4.$$

Puisque $F \cap G = \{0\}$, on obtient

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G = 4 = \dim E.$$

Ainsi,

$$\boxed{E = F \oplus G.}$$

## Partie B – Étude de l'endomorphisme $p$

**5. Linéarité de $p$.** Pour $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q - (\lambda P(1) + \mu Q(1)) \\ &= \lambda(P - P(1)) + \mu(Q - Q(1)) \\ &= \lambda p(P) + \mu p(Q). \end{aligned}$$

De plus, $p(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3. Donc $p$ est un endomorphisme de $E$.

**6. Noyau et image.** On a

$$p(P) = 0 \iff P - P(1) = 0 \iff P \text{ est constant.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\ker(p) = G, \qquad \dim \ker(p) = 1.}$$

Par ailleurs,

$$p(P)(1) = P(1) - P(1) = 0,$$

donc $\mathrm{Im}(p) \subset F$.

Réciproquement, si $Q \in F$, alors $Q(1) = 0$ et

$$p(Q) = Q - Q(1) = Q.$$

Ainsi, tout élément de $F$ appartient à l'image de $p$, d'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) = F, \qquad \dim \mathrm{Im}(p) = 3.}$$

**7. Idempotence.** Pour tout $P \in E$, on a $p(P)(1) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(p(P)) &= p(P) - p(P)(1) \\ &= p(P) - 0 \\ &= p(P). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{p \circ p = p.}$$

**8. Nature de $p$.** Un endomorphisme vérifiant $p^2 = p$ est un projecteur. Son image est $F$ et son noyau est $G$. Ainsi, $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

## Partie C – Une base adaptée

**9. Vérification de la base.** On a

$$\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3).$$

C'est une base de $E$ : les quatre polynômes sont de degrés respectifs $0, 1, 2, 3$, avec un coefficient dominant égal à 1.

Le premier vecteur 1 est une base de $G$, tandis que les trois autres forment une base de $F$. La base $\mathscr{B}'$ est donc adaptée à la décomposition

$$E = G \oplus F.$$

**10. Matrice de $p$ dans $\mathscr{B}'$.** On calcule les images des vecteurs de la base :

$$p(1) = 1 - 1 = 0.$$

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, le polynôme $(X-1)^k$ s'annule en 1, donc

$$p((X-1)^k) = (X-1)^k.$$

Les colonnes de la matrice sont les coordonnées de ces images dans $\mathscr{B}'$. On obtient

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**11. Dimensions du noyau et de l'image.** La matrice diagonale possède un seul coefficient diagonal nul et trois coefficients diagonaux non nuls. On retrouve donc

$$\boxed{\dim \ker(p) = 1, \qquad \dim \mathrm{Im}(p) = 3.}$$

## Partie D – Matrice dans la base canonique

**12. Images des vecteurs de la base canonique.** On a

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - 1 = 0, \\ p(X) &= X - 1, \\ p(X^2) &= X^2 - 1, \\ p(X^3) &= X^3 - 1. \end{aligned}$$

**13. Matrice dans la base canonique.** Dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$, les coordonnées des images précédentes sont

$$\begin{aligned} [p(1)]_{\mathscr{B}} &= (0, 0, 0, 0), \\ [p(X)]_{\mathscr{B}} &= (-1, 1, 0, 0), \\ [p(X^2)]_{\mathscr{B}} &= (-1, 0, 1, 0), \\ [p(X^3)]_{\mathscr{B}} &= (-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**14. Calcul de $p(P)$ et décomposition.** Pour

$$P(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 4,$$

on calcule

$$P(1) = 2 - 1 + 3 + 4 = 8.$$

Par conséquent,

$$\boxed{p(P) = 2X^3 - X^2 + 3X - 4.}$$

Ce polynôme s'annule en 1, donc appartient à $F$. On peut alors écrire

$$\boxed{P(X) = \underbrace{(2X^3 - X^2 + 3X - 4)}_{\in F} + \underbrace{8}_{\in G}.}$$

Cette décomposition est unique puisque $E = F \oplus G$.