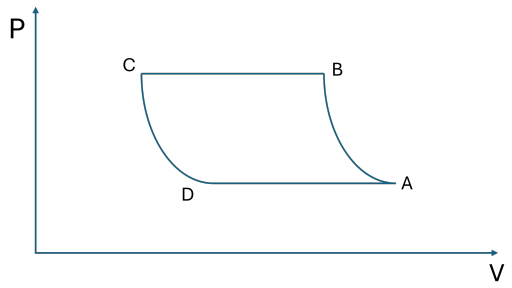
Corrigé du Concours Blanc Toussaint

Nom : ..... Présentation : ...../4 Total : ...../ 100

1 Pompe à chaleur (Total : ...../20 points)

[3 pts] 1. Tracé de l'allure du diagramme de Watt $P(V)$:

- $A \to B$: Compression adiabatique réversible ($P \nearrow$, $V \searrow$).
- $B \to C$: Refroidissement isobare à la pression P_B ($P = \text{cte}$, $V \searrow$).
- $C \to D$: Détente adiabatique réversible ($P \searrow$, $V \nearrow$, jusqu'à $P_D = P_A$).
- $D \to A$: Échauffement isobare à la pression P_A ($P = \text{cte}$, $V \nearrow$).
- Sens de parcours : **sens trigonométrique** (anti-horaire) car la machine fonctionne en récepteur / pompe à chaleur (travail net reçu $W > 0$).



[2 pts] 2. Loi de Laplace et conditions de validité :

- Conditions : Gaz parfait de rapport $\gamma = C_p/C_v$ constant, subissant une évolution **adiabatique** et **réversible** (isentropique).
- En variables (P, T) :

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{cte}$$

[4 pts] 3. Expressions et calculs des températures T_B et T_D :

- Pour l'étape $A \to B$:

$$T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma} \implies T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_A\, a^b$$

- Pour l'étape $C \to D$ (avec $P_C = P_B$ et $P_D = P_A$) :

$$T_C^{\gamma} P_C^{1-\gamma} = T_D^{\gamma} P_D^{1-\gamma} \implies T_D = T_C \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_C \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_C}{a^b}$$

- Application numérique :

$$b = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}5} = \frac{1}{3} \implies a^b = 5^{1/3} \approx 1{,}710$$

$$T_B = 283 \times 1{,}710 = \mathbf{483{,}9}\ \text{K} \quad \text{et} \quad T_D = \frac{298}{1{,}710} = \mathbf{174{,}3}\ \text{K}$$

[3 pts] 4. Premier principe pour les étapes adiabatiques réversibles :

- Évolution adiabatique $(Q = 0) \implies W = \Delta U = C_v \Delta T = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\Delta T$.
- Travail W_{AB} :

$$W_{AB} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \frac{10 \times 8{,}314}{0{,}5}(483{,}9 - 283) = +\mathbf{33{,}4}\ \text{kJ}$$

- Travail W_{CD} :

$$W_{CD} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C) = \frac{10 \times 8{,}314}{0{,}5}(174{,}3 - 298) = -\mathbf{20{,}6}\ \text{kJ}$$

[3 pts] 5. Travaux des forces de pression pour les transformations isobares :

- Expression générale : $W = -\int_{V_I}^{V_F} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -P_0(V_F - V_I)$ pour une isobare à P_0.
- Gaz parfait : $P_0 V = nRT \implies W = -nR(T_F - T_I)$.
- Applications numériques :

$$W_{BC} = -nR(T_C - T_B) = -10 \times 8{,}314 \times (298 - 483{,}9) = +\mathbf{15{,}5}\ \text{kJ}$$

$$W_{DA} = -nR(T_A - T_D) = -10 \times 8{,}314 \times (283 - 174{,}3) = -\mathbf{9{,}0}\ \text{kJ}$$

[1 pt] 6. Justification de l'expression de l'efficacité e :

- Définition générale du rendement/efficacité : $e = \dfrac{|\text{Énergie utile}|}{\text{Énergie fournie}}$.
- Pour une pompe à chaleur, le fluide cède de la chaleur à la source chaude au cours du refroidissement isobare $B \to C$, donc l'énergie reçue par la source chaude est $-Q_{BC} > 0$.
- L'énergie dépensée est le travail mécanique net fourni par le compresseur sur un cycle, noté $W > 0$.
- On a donc bien :

$$e = -\frac{Q_{BC}}{W}$$

[2 pts] 7. Calcul du transfert thermique Q_{BC} :

- Transformation isobare : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B)$.
- Application numérique :

$$Q_{BC} = 1{,}5 \times \frac{10 \times 8{,}314}{0{,}5} \times (298 - 483{,}9) = -\mathbf{46{,}4}\ \text{kJ}$$

[2 pts] 8. Valeur numérique de l'efficacité e :

- Travail total reçu au cours d'un cycle :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 33{,}4 + 15{,}5 - 20{,}6 - 9{,}0 = \mathbf{19{,}3}\ \text{kJ}$$

- Valeur numérique de l'efficacité :

$$e = -\frac{-46{,}4}{19{,}3} \approx \mathbf{2{,}4}$$

2 Oscillateur à RLC (Total : ...../13 points)

[4 pts] 1. Fonction de transfert du bloc 1 et type de filtre :

- Impédance équivalente de la branche parallèle (bobine L, condensateur C, résistance R_0) :

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R_0} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

- L'entrée de l'ALI étant supposée idéale ($i = 0$), le bloc 1 constitue un diviseur de tension à vide :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}_p}{R + \underline{Z}_p} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_p}$$

- En remplaçant $\underline{Y}_p$ par son expression :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0} + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

- **Type de filtre :**
  - À basse fréquence ($\omega \to 0$), le terme $-\frac{R}{L\omega} \to -\infty \implies |\underline{H}_1| \to 0$.
  - À haute fréquence ($\omega \to +\infty$), le terme $RC\omega \to +\infty \implies |\underline{H}_1| \to 0$.
  - Pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le gain est maximal.

  Il s'agit donc d'un **filtre passe-bande** (d'ordre 2).

[3 pts] 2. Fonction de transfert du bloc 2 et montage classique :

- L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire (rétroaction négative sur la borne inverseuse), donc $V_+ = V_-$.
- Potentiel de l'entrée non-inverseuse : $V_+ = \underline{V}_2$.
- Diviseur de tension sur l'entrée inverseuse :

$$V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{V}_3$$

- D'où :

$$\underline{V}_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{V}_3 \implies \underline{H}_2 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- On reconnaît un montage **amplificateur non-inverseur**.

[2 pts] 3. Relations entre les tensions et les fonctions de transfert :

- D'après le bouclage du montage (la sortie du bloc 2 est reliée à l'entrée du bloc 1) :

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_3$$

- En régime sinusoïdal permanent, le gain de boucle vérifie :

$$\frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_1} = \underline{H}_1\underline{H}_2 = 1 \implies \underline{H}_1\underline{H}_2 = 1 \quad \left(\text{ou } \underline{H}_2 = \frac{1}{\underline{H}_1}\right)$$

[2 pts] 4. Pulsation des oscillations ω_{osc} :

- En passant à l'argument sur la relation précédente :

$$\arg(\underline{H}_1) + \arg(\underline{H}_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

- Comme $\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \in \mathbb{R}^+$, $\arg(\underline{H}_2) = 0$. Il vient donc :

$$\arg(\underline{H}_1) = 0$$

- Or $\arg(\underline{H}_1) = 0$ implique que la partie imaginaire du dénominateur s'annule :

$$RC\omega_{\text{osc}} - \frac{R}{L\omega_{\text{osc}}} = 0 \iff \omega_{\text{osc}}^2 = \frac{1}{LC}$$

- D'où :

$$\omega_{\text{osc}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

[2 pts] 5. Expression du rapport R_2/R_1 :

- À la pulsation ω_{osc}, la fonction de transfert $\underline{H}_1$ est réelle pure :

$$\underline{H}_1(j\omega_{\text{osc}}) = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0}}$$

- La condition sur le module s'écrit $|\underline{H}_1(\omega_{\text{osc}})| \cdot |\underline{H}_2| = 1$:

$$\frac{1}{1 + \frac{R}{R_0}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 1 \implies 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{R}{R_0}$$

- On en déduit :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R}{R_0}$$

(Remarque : en pratique, la condition d'accrochage des oscillations impose $\frac{R_2}{R_1}$ légèrement supérieur à $\frac{R}{R_0}$.)

3 Oscillateur à relaxation (Total : ...../20 points)

1. Étude du circuit 1 (comparateur à hystérésis) :

[1 pt] a. Régime de fonctionnement :

Il y a une boucle de rétroaction sur la borne non-inverseuse (+) de l'ALI. Cette rétroaction positive rend le système instable et impose un fonctionnement en **régime saturé**. La sortie prend donc uniquement deux valeurs possibles : $v = \pm V_{\text{sat}}$.

[3 pts] b. Expression des potentiels :

- La borne (−) est reliée à la masse, d'où :
$$v_- = 0$$
- L'ALI étant idéal ($i_+ = 0$), la loi des noeuds écrite à l'entrée non inverseuse et les lois d'ohm sur les résistances R_1 et R_2 permettent d'écrire
$$\frac{v_+ - u}{R_1} + \frac{v_+ - v}{R_2} = 0 \implies v_+ = \frac{\frac{u}{R_1} + \frac{v}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2\, u + R_1\, v}{R_1 + R_2}$$

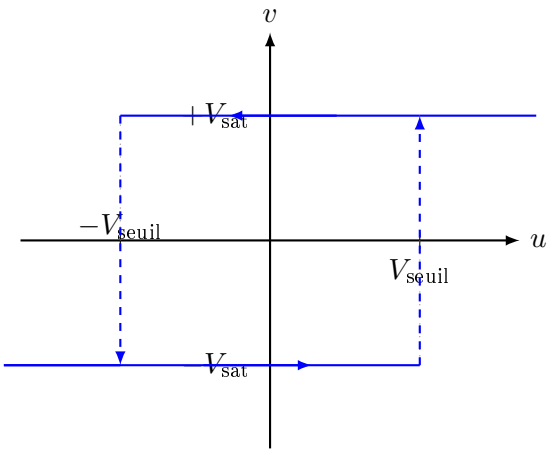
[1.5 pt] c. Cas où $v = +V_{\text{sat}}$:

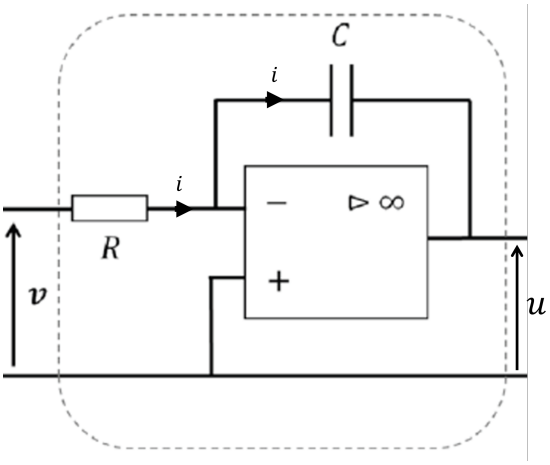
Pour que $v = +V_{\text{sat}}$, la tension différentielle d'entrée doit être positive :
$$\epsilon = v_+ - v_- > 0 \iff v_+ > 0 \iff \frac{R_2\, u + R_1\, V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} > 0$$
On en déduit l'inégalité :
$$u > -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = -V_{\text{seuil}} \quad \text{avec} \quad V_{\text{seuil}} = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

[1.5 pt] d. Cas où $v = -V_{\text{sat}}$:

Pour que $v = -V_{\text{sat}}$, on a $\epsilon < 0 \iff v_+ < 0$:
$$\frac{R_2\, u - R_1\, V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} < 0 \iff u < \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_{\text{seuil}}$$

[1 pt] e. Cycle d'hystérésis :





[2 pts] 2. Étude du circuit 2 (intégrateur) :

L'ALI possède une boucle de rétroaction sur la borne inverseuse (−), il fonctionne donc en régime linéaire : $V_+ = V_- = 0$ car l'entrée + est liée à la masse.
Le courant traversant la résistance R est $i = \frac{v - V_-}{R} = \frac{v}{R}$.
Ce même courant traverse le condensateur vers la sortie : $i = C\frac{d(V_- - u)}{dt} = -C\frac{du}{dt}$. On en déduit
$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v(t)$$

[2 pts] 3. Expression temporelle de $u(t)$ pour $t \in [0, t_1]$:

- À $t = 0$, $u(0) = V_{\text{seuil}}$ et $v(t) = +V_{\text{sat}}$ reste constante tant qu'il n'y a pas basculement.
- L'intégration de la relation temporelle donne directement :

$$u(t) = -\frac{V_{\text{sat}}}{RC}t + u(0) = -\frac{V_{\text{sat}}}{RC}t + V_{\text{seuil}}$$

[2 pts] 4. Détermination de l'instant de basculement t_1 :

- Initialement à $v = +V_{\text{sat}}$, $u(t)$ décroît linéairement.
- D'après le cycle d'hystérésis, la sortie v bascule de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$ dès que $u(t)$ atteint le seuil bas $-V_{\text{seuil}}$ à l'instant t_1 :

$$u(t_1) = -V_{\text{seuil}} \iff -\frac{V_{\text{sat}}}{RC}t_1 + V_{\text{seuil}} = -V_{\text{seuil}}$$
$$\frac{V_{\text{sat}}}{RC}t_1 = 2V_{\text{seuil}} \implies t_1 = 2RC\frac{V_{\text{seuil}}}{V_{\text{sat}}}$$

- Comme $V_{\text{seuil}} = \frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$, on obtient bien :

$$t_1 = 2\frac{R_1}{R_2}RC$$

[1 pt] 5. Valeurs avant et après t_1 :

- La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps, donc $u(t)$ est continue en t_1 :

$$u(t_1^-) = u(t_1^+) = -V_{\text{seuil}} = -\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$$

- La tension de sortie du comparateur $v(t)$ subit une discontinuité (basculement instantané) :

$$v(t_1^-) = +V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad v(t_1^+) = -V_{\text{sat}}$$

[3 pts] 6. Évolution pour $t > t_1$ et instant t_2 :

- Pour $t \in [t_1, t_2]$, la tension $v(t) = -V_{\text{sat}}$. Par intégration avec la condition initiale en t_1 :

$$u(t) = -\frac{1}{RC}\int_{t_1}^{t}(-V_{\text{sat}})\,dt' + u(t_1) = \frac{V_{\text{sat}}}{RC}(t - t_1) - V_{\text{seuil}}$$

- La tension $u(t)$ croît linéairement. D'après le cycle, le comparateur rebascule de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ à l'instant t_2 dès que $u(t_2) = +V_{\text{seuil}}$:

$$\frac{V_{\text{sat}}}{RC}(t_2 - t_1) - V_{\text{seuil}} = +V_{\text{seuil}} \iff t_2 - t_1 = 2RC\frac{V_{\text{seuil}}}{V_{\text{sat}}} = 2\frac{R_1}{R_2}RC$$

- D'où :

$$t_2 = t_1 + 2\frac{R_1}{R_2}RC = 4\frac{R_1}{R_2}RC$$

[2 pts] 7. Représentations graphiques, amplitude et période :

- **Signal $v(t)$:** signal carré créneau symétrique entre $-V_{\text{sat}}$ et $+V_{\text{sat}}$.
  - Amplitude crête-à-crête : $2V_{\text{sat}}$ (ou amplitude V_{sat}).
  - Période : $T = t_2 = 4\frac{R_1}{R_2}RC$.
- **Signal $u(t)$:** signal triangulaire symétrique entre $-V_{\text{seuil}}$ et $+V_{\text{seuil}}$.
  - Amplitude crête-à-crête : $2V_{\text{seuil}} = 2\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$ (ou amplitude V_{seuil}).
  - Période : $T = t_2 = 4\frac{R_1}{R_2}RC$.

4 Cogénération par centrale à vapeur (Total : ...../29 points)

4.1 Description du cycle thermodynamique

[2 pts] 1. Signes des transferts d'énergie :

- $Q_c > 0$: le fluide **reçoit** de la chaleur de la source chaude (combustion dans la chaudière).
- $Q_f < 0$: le fluide **cède** de la chaleur à la source froide au niveau du condenseur pour s'y liquéfier.
- $W_t < 0$: la turbine est motrice, le fluide **fournit** du travail mécanique au milieu extérieur.

[1.5 pts] 2. Combustion externe et comparaison :

- **Définition :** La combustion s'effectue hors du circuit fermé où évolue le fluide caloporteur (l'eau). Les gaz brûlés ne sont jamais en contact avec le fluide du cycle.
- **Avantages :** Grande diversité des combustibles exploitables (gaz, charbon, biomasse, déchets, combustible nucléaire) et préservation des organes internes (comme les ailettes de turbine) contre l'encrassement et la corrosion par les résidus de combustion.
- **Exemple à combustion interne :** Le moteur thermique automobile (moteur à essence ou Diesel) ou la turbine à gaz à cycle ouvert.

[1 pt] 3. Expression du rendement r du moteur :

- Par définition générale du rendement thermique d'un moteur :

$$r = \frac{|\text{Travail utile fourni}|}{\text{Énergie thermique payante reçue}} = \frac{|W_t|}{Q_c} = -\frac{W_t}{Q_c}$$

[3 pts] 4. Expression du rendement en fonction de T_f, T_c, Q_c et S_c :

- Premier principe sur un cycle complet :

$$\Delta U = 0 \implies W_t + Q_c + Q_f = 0 \iff -W_t = Q_c + Q_f$$

  On a donc :

$$r = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

- Second principe sur un cycle complet :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_c \implies Q_f = -T_f \left(\frac{Q_c}{T_c} + S_c \right)$$

- En reportant l'expression de Q_f dans celle de r :

$$r = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_c}{Q_c}$$

[1.5 pts] 5. Rendement de Carnot r_c et application numérique :

- Pour un cycle idéal réversible, l'entropie créée est nulle ($S_c = 0$), d'où le rendement de Carnot :

$$r_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

- Application numérique ($T_f = 300$ K, $T_c = 603$ K) :

$$r_c = 1 - \frac{300}{603} \approx 0{,}502 = 50{,}2\%$$

4.2 Diagramme des frigoristes

[2 pts] 1. Évolution isentropique dans la turbine :

- D'après le second principe industriel, $\Delta s = s_e + s_c$.
- La détente au sein de la turbine est modélisée comme étant adiabatique donc $q = 0$ et $s_e = 0$ et réversible donc $s_c = 0$.
- Par conséquent, $\Delta s = 0$, la transformation est **isentropique**.

[2 pts] 2. Placement des points et tracé des transformations sur le diagramme $\log(P) - h$

[2 pts] 3. Transfert thermique massique q_c et puissance P_c :

- D'après le premier principe industriel pour l'écoulement stationnaire dans la chaudière ($w_u = 0$) :

$$q_c = h_3 - h_2 = 2648 - 111 = 2537 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Puissance thermique fournie par la chaudière ($D_{m1} = 1{,}0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$P_c = D_{m1}\, q_c = 1{,}0 \times 2537 \times 10^3 \text{ W} = 2537 \text{ kW}$$

[1,5 pt] 4. Travail massique w_t et puissance mécanique $|P_t|$:

- La turbine étant adiabatique ($q = 0$), le premier principe industriel s'écrit :

$$w_t = h_4 - h_3 = 1592 - 2648 = -1056 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Puissance mécanique recueillie sur l'arbre de la turbine :

$$|P_t| = D_{m1}|w_t| = 1{,}0 \times 1056 \text{ kW} = 1056 \text{ kW}$$

[1,5 pt] 5. Transfert thermique massique q_f et puissance $|P_f|$:

- Dans le condenseur (sans parties mobiles $w_u = 0$) :

$$q_f = h_1 - h_4 = 111 - 1592 = -1481 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Puissance thermique évacuée par le condenseur :

$$|P_f| = D_{m1}|q_f| = 1{,}0 \times 1481 \text{ kW} = 1481 \text{ kW}$$

  On retrouve bien la valeur $|P_f| = 1481$ kW donnée par l'énoncé.

- **Commentaire :** La puissance rejetée au condenseur (1,48 MW) est supérieure à la puissance mécanique produite (1,06 MW). Cela justifie pleinement la mise en œuvre de la cogénération afin de ne pas dissiper inutilement cette énergie dans l'environnement.

[2 pts] 6. Rendement sans cogénération et comparaison :

- Rendement thermique de l'installation :

$$r = \frac{|P_t|}{P_c} = \frac{1056}{2537} \approx 0{,}416 = 41{,}6\%$$

- On constate bien que $r < r_c$ (41,6% < 50,2%) en raison des irréversibilités inhérentes aux échanges thermiques avec des écarts finis de température.

[3 pts] 7. Titre en vapeur au point 4 :

- **Lecture directe :** Le point 4 se situe très proche de la courbe isotitre $x = 0{,}6$, soit :

$$x_{v4} \approx 0{,}59$$

- **Par le théorème des moments :** Au point 4, le mélange diphasique se situe entre le liquide saturant $h_1 = 111\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et la vapeur saturante sèche à P_1 dont l'enthalpie vaut $h_{v1} \approx 2560\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$:

$$x_{v4} = \frac{h_4 - h_1}{h_{v1} - h_1}$$

$$x_{v4} = \frac{1592 - 111}{2560 - 111} = \frac{1481}{2449} \approx 0{,}60$$

4.3 Récupération de l'énergie thermique

[1 pt] 1. Variation d'enthalpie massique de l'eau de chauffage :

- L'eau liquide étant considérée incompressible et indilatable :

$$\Delta h_d = c_p \left(T_d(x = L) - T_d(x = 0)\right)$$

[3 pts] 2. Détermination du débit massique D_d :

- Le condenseur étant thermiquement isolé de l'extérieur, l'intégralité de la puissance cédée par le fluide du cycle $|P_f|$ est transmise à l'eau du réseau de chauffage :

$$|P_f| = D_d\, \Delta h_d = D_d\, c_p \left(T_d(L) - T_d(0)\right)$$

- D'où le débit massique requis :

$$D_d = \frac{|P_f|}{c_p \left(T_d(L) - T_d(0)\right)}$$

- Application numérique ($T_d(L) = 60\,^\circ\text{C}$, $T_d(0) = 5\,^\circ\text{C}$, $c_p = 4{,}18\ \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$) :

$$D_d = \frac{1481}{4{,}18 \times (60 - 5)} = \frac{1481}{4{,}18 \times 55} = \frac{1481}{229{,}9} \approx 6{,}44\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

[2 pts] 3. Efficacité globale e_g avec cogénération :

- **Justification :** Grâce à la cogénération, l'énergie utile n'est plus seulement l'électricité produite via la puissance mécanique $|P_t|$, mais inclut également la puissance thermique valorisée pour le chauffage urbain $|P_f|$. L'énergie payante demeure la puissance fournie par la combustion du gaz dans la chaudière $|P_c|$. D'où :

$$e_g = \frac{|P_t| + |P_f|}{|P_c|}$$

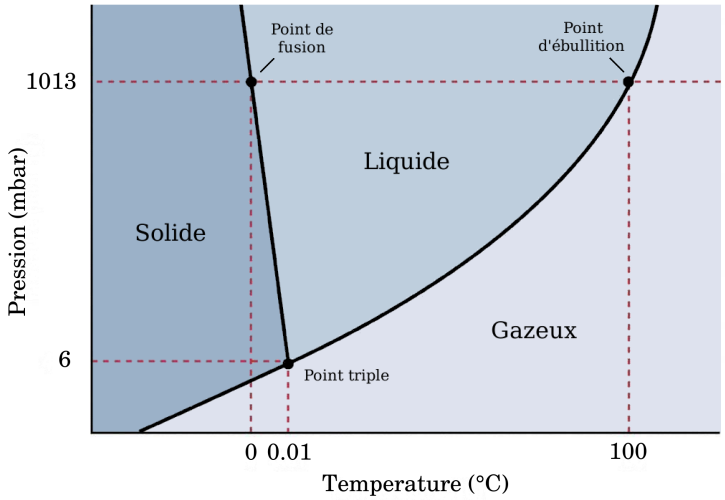
- **Calcul numérique :**

$$e_g = \frac{1056 + 1481}{2537} = \frac{2537}{2537} = 1{,}00 = 100\%$$

- **Commentaire :** En négligeant les pertes vers l'extérieur et la puissance de pompage, le premier principe assure que $|P_c| = |P_t| + |P_f|$, conduisant à une efficacité unitaire théorique de 100%. En pratique, en tenant compte des pertes thermiques et de combustion réelles, l'efficacité se situe entre 85% et 90%, ce qui reste considérablement plus élevé que les 41,6% d'une production électrique seule.

5 Fabrication de neige artificielle (Total : ...../19 points)

[2 pts] 1. Diagramme (P, T) de l'eau et point d'équilibre solide-liquide :



[1 pt] 2. Écriture du premier principe infinitésimal :

- Pour un système fermé au repos macroscopique, le premier principe sous forme infinitésimale s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

où dU est la différentielle de l'énergie interne, δW le travail élémentaire reçu (notamment des forces de pression $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$) et δQ le transfert thermique élémentaire reçu.

[1.5 pts] 3. Calcul de la masse m de la goutte d'eau :

La goutte est sphérique de rayon $R = 0{,}2$ mm $= 2{,}0 \times 10^{-4}$ m. Son volume vaut :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2{,}0 \times 10^{-4})^3 \approx 3{,}35 \times 10^{-11} \text{ m}^3$$

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = 1{,}0 \times 10^3 \times 3{,}35 \times 10^{-11} \approx 3{,}35 \times 10^{-8} \text{ kg} = 33{,}5 \ \mu\text{g}$$

[3 pts] 4. Équation différentielle régissant la température $T(t)$:

- On applique le premier principe à la goutte d'eau liquide entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

- La goutte étant supposée indéformable ($dV = 0$), le travail des forces de pression est nul : $\delta W = 0$.
- Pour une phase condensée indéformable :

$$dU = m c_l dT = \rho V c_l dT$$

- Le transfert thermique reçu de l'air ambiant pendant dt s'écrit :

$$\delta Q = \mathcal{P}_{\text{th}} dt = -hS\,(T(t) - T_e)\,dt$$

- Par identification :

$$\rho V c_l \frac{dT}{dt} = -hS\,(T(t) - T_e)$$

- Avec $\frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}$, on obtient bien :

$$\rho c_l R \frac{dT}{dt} = -3h\,(T(t) - T_e)$$

[2.5 pts] 5. Résolution de l'équation différentielle et temps caractéristique τ :

- On met l'équation sous forme canonique :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_e}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\rho c_l R}{3h}$$

- Application numérique de la constante de temps :

$$\tau = \frac{1{,}0 \times 10^3 \times 4{,}18 \times 10^3 \times 0{,}2 \times 10^{-3}}{3 \times 65} = \frac{836}{195} \approx 4{,}29 \text{ s}$$

- La solution générale avec la condition initiale $T(0) = T_i = 10\,^\circ\text{C}$ s'écrit :

$$T(t) = T_e + (T_i - T_e)e^{-t/\tau}$$

[2 pts] 6. Calcul du temps t_0 pour atteindre $T_s = -5\,^\circ\text{C}$:

- À l'instant t_0, la température atteint le seuil de surfusion $T(t_0) = T_s$:

$$T_s - T_e = (T_i - T_e)e^{-t_0/\tau} \implies e^{-t_0/\tau} = \frac{T_s - T_e}{T_i - T_e}$$

- D'où :

$$t_0 = \tau \ln\left(\frac{T_i - T_e}{T_s - T_e}\right)$$

- Application numérique ($T_i = 10\,^\circ\text{C}$, $T_e = -15\,^\circ\text{C}$, $T_s = -5\,^\circ\text{C}$) :

$$t_0 = 4{,}29 \times \ln\left(\frac{10 - (-15)}{-5 - (-15)}\right) = 4{,}29 \times \ln\left(\frac{25}{10}\right) = 4{,}29 \times \ln(2{,}5) \approx 3{,}93 \text{ s}$$

[4 pts] 7. Rupture de la surfusion et fraction de glace x :

- **Variation d'enthalpie d'échauffement ΔH_1 :**
  L'intégralité de la masse m passe de l'état d'eau liquide à T_s à l'état liquide à $T_{\text{eq}} = 0\,^\circ\text{C}$:

$$\Delta H_1 = m c_l (T_{\text{eq}} - T_s)$$

- **Variation d'enthalpie de solidification partielle ΔH_2 :**
  À la température T_{eq}, une fraction massique x se solidifie (la solidification est l'inverse de la fusion, soit $\Delta h_{\text{sol}} = -\Delta h_{\text{fus}}$) :

$$\Delta H_2 = -x m \Delta h_{\text{fus}}$$

- **Application du premier principe et expression de x :**
  La transformation étant supposée très rapide, elle est adiabatique sous pression constante, donc $\Delta H = 0$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0 \iff m c_l (T_{\text{eq}} - T_s) - x m \Delta h_{\text{fus}} = 0$$

  On en déduit :

$$x = \frac{c_l (T_{\text{eq}} - T_s)}{\Delta h_{\text{fus}}}$$

- **Application numérique :**

$$x = \frac{4{,}18 \times (0 - (-5))}{333} = \frac{4{,}18 \times 5}{333} = \frac{20{,}9}{333} \approx 0{,}063 = 6{,}3\%$$

Seule une faible fraction de la goutte se solidifie lors du franchissement de la surfusion.

[3 pts] 8. Temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide :

- La goutte est désormais à la température constante d'équilibre diphasique $T(t) = T_{\text{eq}} = 0\,^\circ\text{C}$. Pendant cette étape, toute la puissance thermique cédée à l'air sert exclusivement à solidifier la fraction restante d'eau liquide, c'est-à-dire une masse :

$$m_{\text{restante}} = (1 - x)m$$

- Le flux thermique extrait de la goutte est constant car la température de surface reste fixée à T_{eq} :

$$|\mathcal{P}_{\text{th}}| = hS(T_{\text{eq}} - T_e)$$

- L'énergie thermique à extraire pour solidifier complètement cette masse restante est :

$$Q_{\text{sol}} = (1 - x)m\Delta h_{\text{fus}}$$

- La durée nécessaire Δt_{sol} vérifie donc :

$$|\mathcal{P}_{\text{th}}|\Delta t_{\text{sol}} = Q_{\text{sol}} \implies \Delta t_{\text{sol}} = \frac{(1 - x)m\Delta h_{\text{fus}}}{hS(T_{\text{eq}} - T_e)}$$

- En utilisant $\frac{m}{S} = \frac{\rho V}{S} = \frac{\rho R}{3}$:

$$\Delta t_{\text{sol}} = \frac{(1 - x)\rho R\Delta h_{\text{fus}}}{3h(T_{\text{eq}} - T_e)}$$

- **Application numérique :**

$$\Delta t_{\text{sol}} = \frac{(1 - 0{,}063) \times 1{,}0 \times 10^3 \times 0{,}2 \times 10^{-3} \times 333 \times 10^3}{3 \times 65 \times (0 - (-15))}$$

$$\Delta t_{\text{sol}} = \frac{0{,}937 \times 66{,}6 \times 10^3}{195 \times 15} = \frac{62404}{2925} \approx 21{,}3 \text{ s}$$

“‘