Programme de khôlle 7

Semaine du 9 novembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***Approximation(epsilon)*** qui reçoit en argument un flottant et qui renvoie le premier entier $n \geq 2$ tel que $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{ln(k)}$ soit une valeur approchée de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{ln(k)}$ à *epsilon* près.
2. ***Ecriture_deci(n)*** prenant en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant par le calcul la valeur de $x_n = 2,56242424...24$ où 24 se répète n fois.
3. ***Vandermonde(L)*** qui reçoit en argument une liste $L = [a_1, ..., a_n]$ de n flottants et qui renvoie $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

2 Pratique calculatoire

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum \mathrm{e}^{-2n+4}$
3. $\sum_{n \geq 2} v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$
4. $\sum n(n+1)$
5. $\sum_{n \geq 2} w_n$ avec :
$$w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$
6. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$
7. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *Pour $a \in \mathbb{R}$, on note*

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. *Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.*
2. *Encadrer $S(a)$ avec des intégrales pour tout $a > 0$.*
3. *En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \to +\infty$.*

Exercice 3.2. *Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et calculer son déterminant :*

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X] \text{ définie par } \varphi(P) = Q,$$

où Q est le polynôme tel que $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$

Exercice 3.3. *On s'intéresse dans cet exercice à la suite (S_n) définie pour $n \geq 2$ par :*

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2\ln(2)} + \ldots + \frac{1}{n\ln(n)}$$

1. *Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.*
2. *Établir que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :*

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k\ln(k)}$$

3. *Déduire de la question précédente un encadrement de S_n pour $n \geq 2$.*
4. *Démontrer que $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.*
5. *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$?*

Chap.4 : Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée
2 Calcul de déterminant
3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

Chap.5 : Séries numériques

1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions
1.2 Séries télescopiques
1.3 Propriétés
1.4 Convergence absolue

2 Séries de référence
2.1 Série géométrique
2.2 Séries de Riemann

3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs
3.1 Majoration des sommes partielles
3.2 Critère de comparaison
3.3 Critère des équivalents
3.4 Règle de D'Alembert
3.5 Une comparaison série-intégrale
3.6 Critère spécial des séries alternées

4 Développement décimal d'un nombre réel

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
1.2 Sous-espaces propres
1.3 Polynôme caractéristique
1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

2 Les propriétés utiles des éléments propres
2.1 Autour des valeurs propres
2.2 Autour des vecteurs propres
2.3 Autour des sous-espaces propres