Programme de khôlle 8
Semaine du 16 novembre 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

La documentation CCINP est autorisée.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***somme(A)*** qui reçoit une matrice carrée A en argument et qui renvoie :
   - True si la somme des valeurs propres de A est égale à la trace de A
   - False sinon

   !!!Attention à l'égalité entre flottants sous Python
2. ***est_inv(A)*** qui reçoit une matrice carrée A en argument et qui renvoie False si 0 est valeur propre, True sinon.

3. ***puissance(A,n)*** qui reçoit une matrice carrée A ainsi qu'un entier naturel n en arguments et qui renvoie A^n.

2 Pratique calculatoire

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
6. $u_n = \frac{1}{n!}$
7. $u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer les valeurs propres de A.*
2. *Uniquement à l'aide de la question 1., est-il possible de répondre à la question "A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? ".*
   Si oui, répondre à la question.
3. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.*
4. *En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.*

Exercice 3.2. *On se propose dans cet exercice de déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_n - 3u_{n+1} - 3u_{n+2}$$

avec $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $u_2 = 1$. On pose alors $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n.$$

2. *Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.*
3. *Soit la matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = -I_3 + N$. Montrer que N est nilpotente.*
4. *En déduire l'expression du terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 3.3. *On considère E un espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ admettant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par f.*

2. *Soit p un projecteur de E. Montrer que* $\mathrm{sp}(p) \subset \{0; 1\}$.
3. *Soit s une symétrie vectorielle de E. Montrer que* $\mathrm{sp}(s) \subset \{-1; 1\}$.

Chap.5 : Séries numériques

1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions
1.2 Séries télescopiques
1.3 Propriétés
1.4 Convergence absolue

2 Séries de référence
2.1 Série géométrique

2.2 Séries de Riemann

3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs
3.1 Majoration des sommes partielles
3.2 Critère de comparaison
3.3 Critère des équivalents
3.4 Règle de D'Alembert
3.5 Une comparaison série-intégrale

4 Développement décimal d'un nombre réel

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
1.2 Sous-espaces propres
1.3 Polynôme caractéristique
1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

2 Les propriétés utiles des éléments propres
2.1 Autour des valeurs propres
2.2 Autour des vecteurs propres
2.3 Autour des sous-espaces propres

3 Matrice ou endomorphisme diagonalisable
3.1 Définition
3.2 Les théorèmes de diagonalisation
3.3 Comment diagonaliser une matrice ?
3.4 Comment diagonaliser un endomorphisme ?

4 Matrice ou endomorphisme trigonalisable
4.1 Définition
4.2 Le théorème de trigonalisation
4.3 Exemple de trigonalisation
4.4 Retour sur le polynôme caractéristique

5 Applications de la réduction
5.1 Puissances de matrice
5.1.1 Matrices diagonalisables
5.1.2 Matrices trigonalisables
5.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
6.1 La théorie

6.2 Pratique de la résolution
6.3 Comportement asymptotique des solutions
6.4 Équations différentielles scalaires d'ordre n à coefficients constants