NOM : ....
PRÉNOM : ....
NUMÉRO Candidat(e) : ....

CONCOURS EIGSI LA ROCHELLE
Formation d'ingénieur généraliste par la voie de l'apprentissage

ÉCOLE D'INGÉNIEURS
LA ROCHELLE • CASABLANCA

Samedi 14 mars 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Sujet A

DURÉE : 1h30

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte 60 questions, numérotées de 1 à 60.

Les 15 premières questions (numérotées de 1 à 15) portent sur des connaissances mathématiques considérées comme faisant partie du socle fondamental de la formation d'ingénieur généraliste EIGSI.

Pour obtenir la note maximale, vous devez impérativement répondre aux 15 premières questions numérotées de 1 à 15 et répondre à 30 questions parmi les suivantes numérotées de 16 à 60.

Si vous traitez plus de 30 questions parmi les questions numérotées 16 à 60, seules les 30 premières parmi celles-ci seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les espaces blancs de ce sujet peuvent être utilisés à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.**

Question 1 On considère le polynôme suivant

$$P(z) = 5z^2 + 2z + 2.$$

Si on note z_1 et z_2 les racines (réelles ou complexes) de P, que vaut la somme $z_1 + z_2$?

A. $z_1 + z_2 = -\frac{2}{5}$

B. $z_1 + z_2 = -2$

C. $z_1 + z_2 = \frac{2}{5}$

D. $z_1 + z_2 = 2$

Question 2 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A. $\det(A) = 32$

B. $\det(A) = 0$

C. $\det(A) = 4$

D. $\det(A) = 16$

Question 3 On considère l'application réelle suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\sin(x)) \end{array}$$

La dérivée de f a pour expression :

A. $\cos(x)\ln(\sin(x))$

B. $\frac{1}{\sin(x)}$

C. $\frac{1}{\tan(x)}$

D. $\tan(x)$

Question 4 Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation suivante :

$$\tan(x) = 1.$$

Laquelle de ces affirmations est juste ?

A. $x = \frac{\pi}{3}$

B. L'équation n'a pas de solution.

C. $x = 0$

D. $x = \frac{\pi}{4}$

Question 5 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique réelle de raison -3 et telle que $u_3 = 27$. Que vaut u_2 ?

A. $u_2 = 30$

B. $u_2 = -1$

C. $u_2 = -9$

D. $u_2 = 9$

Question 6 On considère l'équation différentielle suivante

$$y' = xy.$$

Donner la forme générale des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

A. $Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$

B. $Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$

C. $e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

D. $e^{\frac{x^2}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}$

Question 7 On considère l'application réelle suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos(x) \end{array}$$

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de f ont pour forme :

A. $\frac{x^2}{2}\cos(x) - \sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

B. $x\sin(x) + \cos(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{x^2}{2}\sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

D. $(x+1)\sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Question 8 On considère le nombre complexe suivant :

$$z = -1 - \sqrt{3}i,$$

alors z peut aussi s'écrire comme :

A. $z = 4e^{i4\pi/3}$

B. $z = 2e^{i4\pi/3}$

C. $z = 4e^{i\pi/3}$

D. $z = 2e^{i7\pi/6}$

Question 9 On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ce système a :

A. aucune solution.

B. une seule solution qui est : $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

C. une seule solution qui est : $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

D. une infinité de solutions.

Question 10 On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 0).$$

Le produit vectoriel de v_1 avec v_2 vaut :

A. $(-2, 1, 1)$

B. $(1, 1, -2)$

C. $(0, 0, 0)$

D. 0

Question 11 On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A. A n'est pas inversible.

B. A est inversible et le coefficient de la première ligne, troisième colonne de A^{-1} vaut 0.

C. A est inversible et le coefficient de la deuxième ligne, troisième colonne de A^{-1} vaut 0.

D. A est inversible et le coefficient de la première ligne, deuxième colonne de A^{-1} vaut 0.

Question 12 On considère l'inéquation d'inconnue réelle x suivante :

$$\frac{x^2-1}{x-3} > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

A. $]-1,3[\cup]3,+\infty[$

B. $]-1,1[\cup]3,+\infty[$

C. $[-1,1]\cup]3,+\infty[$

D. $]3,+\infty[$

Question 13 On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de A^4 sont :

A. tous égaux à 16.

B. tous égaux à 4.

C. tous égaux à 6.

D. tous égaux à 0.

Question 14 Les primitives de $\cos^2(x)$ ont pour expression

A. $\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C,\ C \in \mathbb{R}$

B. $\frac{1}{2}x\cos(x) + 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{1}{2}\sin^2(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

D. $-2\cos(x)\sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Question 15 Soit A une matrice à 5 lignes et 4 colonnes. Une de ces affirmations est fausse, laquelle ?

A. Si B est une matrice à 4 lignes et 5 colonnes, le produit AB est bien défini.

B. Si B est une matrice à 4 lignes et 5 colonnes, le produit BA est bien défini.

C. Si B est une matrice à 1 ligne et 5 colonnes, le produit BA est bien défini.

D. Si B est une matrice à 5 lignes et 4 colonnes, le produit AB est bien défini.

Question 16 On considère l'équation suivante avec $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} e^{xy}\right) = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation représente

A. la réunion de deux droites sécantes

B. une hyperbole

C. un cercle

D. une parabole

Question 17 On considère l'inéquation d'inconnue réelle x suivante :

$$||x-1|-|x-2|| \geq |x-3|.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

A. $[1,+\infty[$

B. $[2,+\infty[$

C. $[2,4]$

D. $[1,3]$

Question 18 On prend un jeu de 54 cartes préalablement mélangé. On retourne une à une les cartes du dessus du paquet et on s'arrête dès que l'on tombe sur l'as de cœur. Quelle est la probabilité que l'as de cœur soit la dixième carte ?

A. $\frac{1}{54}$

B. $\frac{1}{54^{10}}$

C. $\frac{53^9}{54^{10}}$

D. $\binom{54}{10}\frac{53^9}{54^{10}}$

Question 19 On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1) \text{ et } v_2 = (1, -1, 0).$$

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à ces deux vecteurs est

A. une droite vectorielle d'équation paramétrique $\begin{cases} t \\ t \\ t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

B. un plan vectoriel d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

C. un plan vectoriel d'équation cartésienne $x - y = 0$.

D. une droite vectorielle d'équation paramétrique $\begin{cases} t \\ t \\ -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Question 20 On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \cos(xy^2) \end{array}$$

La différentielle de f a pour expression :

A. $df(x, y) = -y \sin(xy^2)(y + 2x)$.

B. $df(x, y) = -y^2 \sin(xy^2)dx - 2xy \sin(xy^2)dy$.

C. $df(x, y) = -y \cos(xy^2)(y + 2x)dxdy$.

D. $df(x, y) = -y^2 \cos(xy^2)dx - 2xy \cos(xy^2)dy$.

Question 21 Étant donné un réel x, on considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles cette matrice n'est pas inversible ?

A. 2 et 3

B. 1, 2 et 3

C. 2 et -4

D. La matrice est inversible pour toutes les valeurs de x.

Question 22 Quelle est la valeur de l'intégrale suivante ?

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$$

A. L'intégrale n'est pas bien définie.

B. $\frac{\ln(2)}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Question 23 Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x)$ peut aussi s'écrire :

A. $3\cos(x)\sin(x)$

B. $\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$

C. $\cos^3(x) + \sin^3(x)$

D. $3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$

Question 24 Le nombre complexe $2 + i$ admet deux racines carrées complexes. Les parties imaginaires de ces racines sont :

A. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

B. 1 et -1

C. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$

D. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$

Question 25 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé (Oxy) de la fonction définie par

$$f(x) = \cos(x).$$

Si on fait subir à $\mathcal{C}$ une rotation de centre $(0, 1)$ et d'angle π, une équation du graphe obtenu est :

A. $y = -\cos(x) + 2$

B. $y = -\cos(2x)$

C. $y = \cos(-x + 2)$

D. $y = -\cos(x) + 1$

Question 26 On lance indéfiniment et de manière indépendante un dé à 7 faces. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la somme des n premiers lancers soit impaire. Alors la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est :

A. une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$

B. une suite arithmétique de raison $\frac{1}{7}$

C. la suite constante $\frac{1}{7}$

D. une suite qui vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n$

Question 27 Les relevés de températures entre le 20 et 27 janvier 2020 à l'aérodrome de La Rochelle sont les suivants :

$$1°\text{C},\ 0°\text{C},\ 1°\text{C},\ 3°\text{C},\ 3°\text{C},\ 5°\text{C},\ 8°\text{C}.$$

La variance de ces températures est :

A. $\sqrt{46}$

B. 46

C. 3

D. $\frac{46}{7}$

Question 28 On considère l'équation différentielle suivante définie sur $]3,+\infty[$

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)(x-3)y' = y\\ y(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

La solution F de cette équation différentielle vérifie

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 29 On considère le système réel suivant

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2\alpha y & + & 2z & = & 3 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$, ce système a une infinité de solutions ?

A. $\alpha = \frac{1}{2}$

B. $\alpha \in \mathbb{R}$

C. $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

D. $\alpha = 1$

Question 30 On considère deux variables aléatoires X et Y suivant chacune une loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose en outre que

$$P(X = 0|Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

Quelle est la probabilité de lévènement $X + Y = 2$?

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{3}{4}$

Question 31 On considère le nombre complexe suivant où $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ce nombre est

A. $-i\cos(\theta)$

B. $\sin(\theta)$

C. $\cos(\theta)$

D. e^{θ}

Question 32 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + y = 0.$$

Pour quelles valeurs de λ les solutions non nulles de cette équation différentielle ne peuvent s'écrire exclusivement avec des exponentielles réelles ?

A. $\lambda \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$

B. $\lambda \in]-1,1[$

C. $\lambda \in \{-1,1\}$

D. $\lambda \in \{1\}$

Question 33 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 x^3}{1 + n^3 x^2}$$

Pour quelles valeurs de x cette suite admet-elle une limite finie ?

A. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

B. $x \in \mathbb{R}$

C. $x \in]-1, 1[$

D. $x \in \{0\}$

Question 34 On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si on note f la solution de ce problème, que vaut $f(1)$?

A. $1 - 2e^{-1}$

B. $1 + 2e^{-1}$

C. $-1 - 2e^{-1}$

D. $-1 + 2e^{-1}$

Question 35 Un questionnaire comporte une question portant sur une maladie vénérienne. Les sondés y répondent par 1 ou -1. On s'intéresse à la fréquence de la réponse 1. On modélise la réponse donnée par une variable aléatoire R telle que $R(\Omega) = \{-1, 1\}$ et on pose $p = P(R = 1)$.

La question étant sensible, pour garantir l'anonymat, les réponses enregistrées vont être brouillées de manière aléatoire à l'aide du procédé suivant : on introduit une variable aléatoire S indépendante de R telle que

$$S(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } P(S = 1) = \frac{1}{3}.$$

La réponse enregistrée sera alors le résultat du produit RS.

Enfin, on suppose que la taille de l'échantillon des sondés est suffisamment grande pour évaluer les probabilités par des méthodes statistiques. Que penser de ce procédé ?

A. Il garantit l'anonymat et permet d'évaluer p grâce à la formule $p = 2 - 3P(RS = 1)$.

B. Le procédé ne nous permet pas d'évaluer p car $P(RS = 1) = \frac{1}{3}$.

C. Le procédé ne garantit pas l'anonymat car on peut retrouver les valeurs initiales de R par la formule $R = \frac{1}{S} RS$.

D. Il garantit l'anonymat et permet d'évaluer p grâce à la formule $p = 3P(RS = 1)$.

Question 36 On considère l'application suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(\cos(x))}{e^x+1} \end{array}$$

Une expression de sa dérivée est

A. $f'(x) = \frac{e^x\left(\sin(\cos(x))-\sin(x)\cos^2(x)\right)-\sin(x)\cos^2(x)}{(e^x+1)^2}$

B. $f'(x) = \frac{e^x(-\sin(\cos(x))-\sin(x)\cos(\cos(x)))-\sin(x)\cos(\cos(x))}{(e^x+1)^2}$

C. $f'(x) = \frac{e^x(\sin(\cos(x))-\sin(x)\cos(\cos(x)))-\sin(x)\cos(\cos(x))}{(e^x+1)^2}$

D. $f'(x) = \frac{e^x(\sin(\cos(x))-\sin(x)\sin(\cos(x)))-\sin(x)\sin(\cos(x))}{(e^x+1)^2}$

Question 37 On considère le polynôme suivant

$$P(X) = X^3 - 3X + 1$$

En étudiant la fonction polynômiale associée, on peut dire que

A. P a trois racines réelles distinctes

B. P a une racine réelle triple

C. P a une racine réelle et deux racines complexes

D. P a une racine réelle double et une racine réelle simple

Question 38 Soient x, y et z, trois réels tels que

$$x \in [-1, 4],\ y \in [1, 3],\ z \in [-1, 6].$$

On a que :

A. $-1 \leq \frac{z}{x^2+y^2} \leq 6$

B. $-\frac{1}{2} \leq \frac{z}{x^2+y^2} \leq \frac{6}{25}$

C. $-\frac{1}{2} \leq \frac{z}{x^2+y^2} \leq 3$

D. $-\frac{1}{25} \leq \frac{z}{x^2+y^2} \leq 6$

Question 39 L'expression trigonométrique $\cos^2(x)\sin^2(x)$ peut également s'écrire :

A. $\frac{1}{16}\left(1+\sin(4x)\right)$

B. $\frac{1}{16}\left(1+\cos(4x)\right)$

C. $\frac{1}{8}\left(1-\cos(4x)\right)$

D. $\frac{1}{8}\left(1-\sin(4x)\right)$

Question 40 Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$. Alors :

A. P n'a que des racines réelles.

B. P n'a que des racines complexes non réelles.

C. P a une racine réelle et quatre racines complexes non réelles.

D. P a deux racines réelles et trois complexes non réelles.

Question 41 On considère les deux points du plan suivants :

$$A(1;3),\ B(2;5),$$

et on note $\mathcal{D}$ la droite passant par ces deux points. Parmi les droites suivantes, laquelle est orthogonale à $\mathcal{D}$?

A. La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

B. La droite d'équation $y = -3x + 2$.

C. La droite d'équation $y = -2x + 7$.

D. La droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Question 42 Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ est :

A. $3x + 2y + z - 6 = 0$

B. $x + y + z - 3 = 0$

C. $2x + 4y + 6z - 12 = 0$

D. $x + 2y + 3z - 3 = 0$

Question 43 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application réelle définie sur $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = f(u_n).$$

Une de ces affirmations est fausse, laquelle ?

A. Si f est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

B. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

C. Si f est croissante et que $v_0 > 0$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

D. Si f est croissante majorée, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

Question 44 On suppose que X est une variable alétoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$, où σ désigne l'écart-type. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, quelle est la loi de λX ?

A. Une loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda\sigma)$.

B. Une loi $\mathcal{N}(0, |\lambda|\sigma)$.

C. Une loi $\mathcal{N}(0, \lambda\sigma)$.

D. Une loi $\mathcal{N}(\lambda, |\lambda|\sigma)$.

Question 45 Soit C un réel strictement positif. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{Cx} = x$$

Pour quelles valeurs de C cette équation admet-elle plusieurs solutions ?

A. $C > e$

B. Pour aucune valeur de C

C. Pour toutes les valeurs de C

D. $C < \frac{1}{e}$

Question 46 Étant donné la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quelle est l'expression de A^{10} ?

A. $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $A^{10} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

C. $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 47 Pour un évènement probabiliste donné E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E. Étant donnés A, B et C trois évènements probabilistes, parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à $P\left(\overline{A \cap B \cap C}\right)$?

A. $1 - P(A) + P(B) + P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

B. $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C})$

C. $P(\overline{A}) + P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{C}) - P(\overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

D. $1 - P(A)P(B)P(C)$

Question 48 On considère l'inéquation d'inconnue réelle x suivante :

$$\frac{-2}{x^2 - x - 2} \geq 1.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

A. $]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

B. $]-1, 0] \cup [1, 2[$

C. $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

D. $[-1, 0] \cup [1, 2]$

Question 49 On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k},$$

et on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = S_{2n+1}.$$

Laquelle de ces affirmation est vraie ?

A. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

B. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante

C. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

D. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique

Question 50 On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t + 5 \\ z = 3t + 6 \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

On note $\mathcal{P}$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et passant par $A(1; 2; 3)$. Une équation cartésienne de ce plan est :

A. $5x - y - z = 0$

B. $x - 2y + z = 0$

C. $4x + 5y + 6z = 0$

D. $x + 2y + 3z = 0$

Question 51 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos(x)dx.$$

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une des relations de récurrence suivantes, laquelle ?

A. $I_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}I_n$

B. $I_{n+2} = -(n+1)(n+2)I_n$

C. $I_{n+2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+1)(n+2)I_n$

D. $I_{n+2} = \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}I_n$

Question 52 On note $\mathcal{C}$ la la courbe représentative dans un repère orthonormé (Oxy) de la fonction définie par

$$f(x) = \sin(x)$$

En faisant subir à $\mathcal{C}$ une homothétie de centre O et de rapport 2, puis une symétrie d'axe Oy, une équation cartésienne du graphe ainsi obtenu est :

A. $y = -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

B. $y = -\frac{1}{2}\sin(2x)$

C. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

D. $y = -2\sin(2x)$

Question 53 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{1+x}dx.$$

Laquelle de ces affirmations est vraie :

A. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et a une limite finie.

B. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et n'a pas de limite finie.

C. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et a une limite finie.

D. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et n'a pas de limite finie

Question 54 On considère la fonction réelle suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right)}.$$

Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

A. $]2, e^{\frac{1}{3}} + 2[\cup]e^{\frac{1}{3}} + 2, +\infty[$

B. $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

C. $]2, +\infty[$

D. $]2, 3[\cup]3, +\infty[$

Question 55 Parmi les expressions suivantes, une d'entre elle n'est pas une expression de la dérivée de la fonction tangente. Laquelle ?

A. $\frac{1}{\cos^2(x)}$

B. $1 + \tan^2(x)$

C. $\frac{2}{1+\cos(2x)}$

D. $\frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)}$

Question 56 On note $\mathcal{C}$ la la courbe représentative dans un repère orthonormé (Oxy) de la fonction définie par :

$$f(x) = xe^{x^2},$$

et on note D_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la droite D_a passe par l'origine des axes ?

A. $a = 0$

B. $a = 0$ et $a = 1$

C. $a = 1$

D. $a = 0$ et $a = -1$

Question 57 Que vaut

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3+1)^{2/n^3} \ ?$$

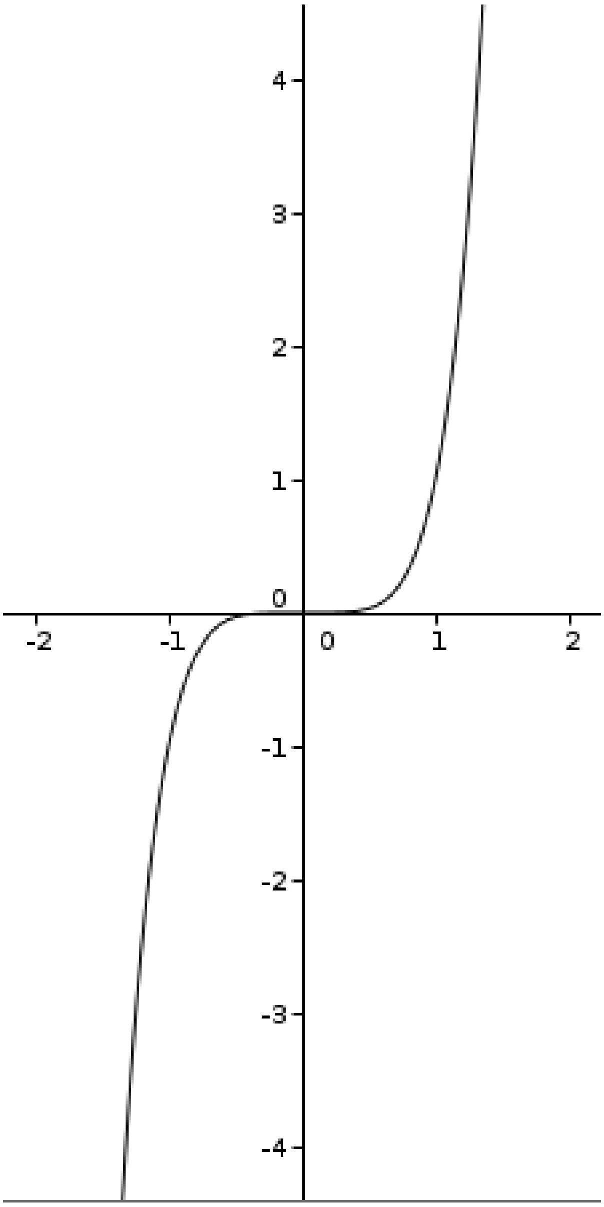
A. $+\infty$

B. 1

C. 0

D. e^2

Question 58 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La représentation graphique de la fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, une seule d'entre elles est vraie, laquelle ?

A. f est paire et on ne peut rien dire sur son signe.

B. f est impaire et change de signe.

C. f est impaire et on ne peut rien dire sur son signe.

D. f est paire et ne change pas de signe.

Question 59 Que vaut la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}?$$

A. $-\infty$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $+\infty$

Question 60 Une historienne cherche à retrouver la descendance d'une scientifique du XIX-ème siècle. Des échanges de lettres montrent que cette femme a eu deux enfants non jumeaux, et que l'un d'eux est un garçon. Cependant, nous ne savons pas si c'est l'enfant aîné ou cadet qui est un garçon. Aucun document de l'état civil ne permet de savoir si l'autre enfant est un garçon ou une fille. Avant de procéder à des recherches complémentaires dans les archives d'un couvent de femmes, on aimerait connaître la probabilité p que cette scientifique ait eu un garçon et une fille. En prenant comme hypothèse que la probabilité de naissance d'un garçon et la probabilité de naissance d'une fille sont de $\frac{1}{2}$, quelle est la valeur de p ?

A. $p = \frac{1}{4}$

B. $p = \frac{2}{3}$

C. $p = \frac{1}{2}$

D. $p = \frac{3}{4}$