NOM : ....
PRÉNOM : ....
NUMÉRO Candidat(e) : ....

CONCOURS EIGSI LA ROCHELLE
Formation d'ingénieur généraliste par la voie de l'apprentissage

Samedi 13 mars 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Sujet B

DURÉE : 1h30

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte 60 questions, numérotées de 1 à 60.

Les 15 premières questions (numérotées de 1 à 15) portent sur des connaissances mathématiques considérées comme faisant partie du socle fondamental de la formation d'ingénieur généraliste EIGSI.

Pour obtenir la note maximale, vous devez impérativement répondre aux 15 premières questions numérotées de 1 à 15 et répondre à 30 questions parmi les suivantes numérotées de 16 à 60.

Si vous traitez plus de 30 questions parmi les questions numérotées 16 à 60, seules les 30 premières parmi celles-ci seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les espaces blancs de ce sujet peuvent être utilisés à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.**

Question 1 On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, -1).$$

Le produit scalaire de v_1 avec v_2 vaut :

A. $(-2, 2, 0)$

B. 1

C. $(0, -2, 2)$

D. 0

Question 2 Parmi les opérations matricielles suivantes, l'une d'entre elle n'est pas valide. Laquelle ?

A. $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

B. $3+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Question 3 On considère l'application réelle suivante :

$$f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array}$$

Sur $]0,+\infty[$, les primitives de f ont pour forme :

A. $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}$

B. $\frac{x^3}{2}\ln(x) - \frac{x^3}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^3}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

D. $\ln(x) - \frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$

Question 4 $(1-i)^8$ est égal à

A. 256

B. $256i$

C. 16

D. $16i$

Question 5 On considère l'équation différentielle suivante

$$y' = \frac{1}{x} y.$$

Donner la forme générale des solutions définies sur $]0, +\infty[$.

A. $Cx,\ C \in \mathbb{R}$

B. $x + C,\ C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}$

D. Seule la fonction nulle est solution sur $]0, +\infty[$.

Question 6 On lance deux dés discernables équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité qu'apparaisse sur chaque dé un chiffre impair ?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

Question 7 On considère l'application réelle suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\cos(x)) \end{array}$$

La dérivée de f a pour expression :

A. $\cos(\sin(x))$

B. $\cos(x)\cos(\sin(x))$

C. $\sin(x)\cos^2(x)$

D. $-\sin(x)\cos(\cos(x))$

Question 8 On considère le polynôme suivant

$$P(z) = 2z^2 + z + 2.$$

Si on note z_1 et z_2 les racines (réelles ou complexes) de P, que vaut le produit $z_1 z_2$?

A. $\frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$

B. 2

C. 1

D. $\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$

Question 9 On considère l'inéquation d'inconnue réelle x suivante :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

A. $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

B. $]2, +\infty[$

C. $]-2, 1[\cup]2, +\infty[$

D. $]-2, +\infty[$

Question 10 On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient situé à la deuxième ligne, deuxième colonne de A^4 vaut :

A. 16

B. 0

C. 12

D. 2

Question 11 On considère l'application réelle suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x^2} \end{array}$$

Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A. Les primitives de f ont pour expression : $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

B. Les primitives de f ont pour expression : $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

C. On ne sait pas exprimer de primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.

D. Les primitives de f ont pour expression : $\frac{x^2}{2}e^{-x^3/3} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Question 12 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique réelle de raison 10 et telle que $u_2 = 200$. Que vaut u_{10} ?

A. 2.10^{10}

B. $10^{10} + 100$

C. 1000

D. 280

Question 13 On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Ce système a :

A. une seule solution qui est : $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

B. aucune solution.

C. une infinité de solutions.

D. une seule solution qui est : $(x, y, z) = (3, 1, 1)$.

Question 14 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A. $\det(A) = 32$

B. $\det(A) = 8$

C. $\det(A) = 0$

D. $\det(A) = 2$

Question 15 Une expression alternative de $\cos(3x)$ est

A. $3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$

B. $3\cos(x)$

C. $\cos^3(x) - \sin^3(x)$

D. $\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$

Question 16 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(1;1)$. Pour calculer la probabilité $P(X^2 < 2)$, on utilise la formule :

A. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$

B. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$

C. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-(x-1)^2/2} dx.$

D. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/2} dx.$

Question 17 La méthode de Newton pour chercher à calculer une valeur approchée de la racine carrée de 2 consiste à construire une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui va tendre vers la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. La suite est construite de la manière suivante : on pose

$$x_0 = 1,$$

et une fois calculé x_n, on détermine x_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection entre la tangente au graphe de f passant par $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on admettra que cette suite ne s'annule pas) ?

A. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{2}{x_n}$

B. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2 - 2$

C. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$

D. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$

Question 18 On considère l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt.$$

La dérivée de F a pour expression

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^{x^4}$

B. $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$

C. $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^{x^4}(x^2 - x)$

D. $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^{x^4} - e^{x^2}$

Question 19 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé (Oxy) de l'application définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

En faisant subir à $\mathcal{C}$ une symétrie d'axe d'équation $y = x$ puis une symétrie d'axe (Oy), le graphe obtenu :

A. n'est pas le graphe d'une fonction.

B. a pour équation cartésienne $y = -\sqrt{x}$.

C. a pour équation cartésienne $y = -\frac{1}{x^2}$.

D. a pour équation cartésienne $y = \sqrt{x}$.

Question 20 On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 5,$$

et on introduit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - c,$$

où c est un réel. Quelle valeur de c fait de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 3 ?

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

D. 0

Question 21 On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (1-x)(1-y)(x+y-1) \end{array}$$

et on considère le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est :

A. $\left\{(1,1),(1,0),(0,1),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

B. $\left\{(1,1),(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right\}$.

C. $\{(1,1)\}$.

D. $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$.

Question 22 On considère l'application réelle suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos^4(x) \end{array}$$

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de f ont pour forme :

A. $\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + C,\ C \in \mathbb{R}$

B. $\frac{1}{5}\sin^5(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{3}{8}\sin(2x) + \frac{1}{4}x + C,\ C \in \mathbb{R}$

D. $\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Question 23 On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$x + y + z = 1,$$

et on note $\mathcal{D}$ la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

A. $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

B. $\left(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}, 0\right)$

C. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$

D. Un tel point n'existe pas.

Question 24 On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Cette suite

A. converge vers -1.

B. diverge vers $-\infty$.

C. converge vers 1.

D. diverge vers $+\infty$.

Question 25 On considère l'application F suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y)^2 \end{array}$$

Le calcul de

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

donne

A. $2(x+y)^2$

B. 0

C. 8

D. 4

Question 26 On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant 2 boules noires et trois boules blanches. On lance la pièce, si on obtient pile on tire sans remise 2 boules de l'urne, si on obtient face on tire sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité que parmi les boules tirées, il n'y ait qu'une seule boule noire ?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

Question 27 Combien d'anagrammes distincts peut-on réaliser avec les lettres 15 lettres suivantes :

EIGSI LA ROCHELLE

A. $\frac{15!}{4!\,6!}$

B. $\frac{15!}{8!}$

C. $15!$

D. $\frac{15!}{2!\,(3!)^2}$.

Question 28 On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie de manière suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \begin{cases} a\frac{\cos(x)-1}{x^2} \text{ si } x < 0 \\ b(1+x)^{1/x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

où les coefficients a et b sont des réels. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

A. Quelques soient les valeurs de a et b, f ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

B. Pour les seules valeurs $a = 0$ et $b = 0$.

C. Pour toutes les valeurs de a et b vérifiant $a = -2be$.

D. Pour $a = 0$ et b un réel quelconque.

Question 29 On considère le polynôme suivant

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$$

Une de ces affirmations est fausse, laquelle ?

A. P n'a qu'une racine réelle.

B. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π sont des arguments des racines de P.

C. Le produit des trois racines de P vaut -1.

D. Le module des racines de P vaut 1.

Question 30 Trouver les réels a, b et c pour que la matrice suivante soit inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

A. Les réels a, b et c doivent être deux à deux distincts.

B. La matrice est inversible quels que soient les réels a, b, c.

C. Au moins deux des trois réels a, b et c doivent être égaux.

D. Les réels a, b et c doivent être égaux.

Question 31 On considère $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan d'équations :

$$\mathcal{D} : \ y + 2x + 1 = 0$$

$$\mathcal{D}' : y + x - 1 = 0$$

Une équation de la droite passant par l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et orthogonale à $\mathcal{D}$ a pour forme :

A. $2y - x - 8 = 0$

B. $2y + x - 4 = 0$

C. $y - x - 5 = 0$

D. $y - 2x - 7 = 0$

Question 32 Une de ces affirmation est fausse, laquelle ?

A. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, $(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = 0$.

B. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, $(u \wedge v) \cdot u = 0$.

C. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, $(u \wedge v) \cdot v = 0$.

D. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, $(u \wedge v) \wedge (u \wedge v) = 0$.

Question 33 Que vaut
$$\int_0^{\pi} e^t \sin(t)dt \text{ ?}$$

A. $\frac{1}{2}e^{\pi}$

B. $\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$

C. $-\frac{1}{2}e^{\pi}$

D. $\frac{1}{2}(1-e^{\pi})$

Question 34 On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Que vaut $y(2)$?

A. $\frac{14}{3}e^2$

B. $7e^2$

C. $4e^2$

D. $5e^2$

Question 35 Dans $\mathbb{R}^3$, on note S la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 2, et $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x+y+z=1.$$

Quelles sont les coordonnées du point de la sphère qui est le plus éloigné du plan ?

A. $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$.

B. $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$.

C. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

D. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Question 36 On définit les 3 polynômes suivants :

$$P_1(X) = (X-1)(X-2)$$

$$P_2(X) = (X-1)(X-3)$$

$$P_3(X) = (X-2)(X-3)$$

ainsi que le polynôme

$$Q(X) = 1 + X + X^2.$$

Déterminer des réels a, b, c vérifiant :

$$Q = aP_1 + bP_2 + cP_3$$

A. $a = \frac{15}{3},\ b = \frac{2}{5},\ c = \frac{1}{7}$.

B. $a = \frac{3}{4},\ b = -1,\ c = 2$.

C. $a = \frac{13}{2},\ b = -7,\ c = \frac{3}{2}$.

D. $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{7},\ c = \frac{8}{3}$.

Question 37 Que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

A. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Question 38 On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$u = (1, 2, 3),\ v = (3, 2, 1).$$

À quelle condition sur les réels a, b, c, le vecteur (a, b, c) est coplanaire avec les vecteurs u et v ?

A. $2a + b - c = 0.$

B. $a - 2b + c = 0.$

C. $3a + 2b + c = 0.$

D. $a + 2b + 3c = 0.$

Question 39 On se donne le système linéaire à variables complexes suivant :

$$\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$$

Les modules de z et z' sont :

A. $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z'| = \sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ |z'| = \sqrt{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ |z'| = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z'| = 1 \end{cases}$

Question 40 Que vaut l'intégrale suivante

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^2+x+1} dx \ ?$$

A. $3\sqrt{3}\pi$

B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

D. $\frac{\pi}{3}$

Question 41 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé (Oxy) de la fonction définie par l'équation

$$y = e^x.$$

On fait subir à $\mathcal{C}$ une symétrie d'axe (Oy), puis une symétrie d'axe (Ox). Une équation cartésienne de la courbe ainsi obtenue a pour équation :

A. $y = -e^x$

B. $y = \ln(x)$

C. $y = -\ln(x)$

D. $y = -e^{-x}$

Question 42 Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (a(x) + b(y))^2.$$

Que vaut la différentielle de f ?

A. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ df(x, y) = 2(a(x) + b(y))(a'(x) + b'(y))dxdy$

B. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ df(x, y) = 2(a(x) + b(y))(dx + dy)$

C. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ df(x, y) = 2a'(x)a(x)dx + 2b'(y)b(y)dy$

D. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ df(x, y) = 2(a(x) + b(y))(a'(x)dx + b'(y)dy)$

Question 43 Soient a et b deux réels, que vaut l'expression suivante

$$\frac{|a-b|+a+b}{2}\ ?$$

A. $\max(a, b)$

B. $\min(a, b)$

C. $\max(a, -b)$

D. $\min(a, -b)$

Question 44 Quel est le reste de la division Euclidienne de X^{2021} par $X^3 - X$?

A. $X^2 + X$

B. $X + 1$

C. $X^2 + X + 1$

D. X

Question 45 Que vaut la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} \ ?$$

A. 1

B. -1

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Question 46 En admettant que le polynôme suivant admette une racine réelle

$$P(X) = X^3 - 3X^2(1+i) + X(1+6i) + 1 - 3i,$$

les modules des racines de ce polynôme sont

A. 1, 2 et $\sqrt{6}$

B. 2, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$

C. 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$

Question 47 On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La limite en $-\infty$ de la solution de cette équation différentielle vaut :

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 0

D. 1

Question 48 Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + az = 1 \end{cases}$$

Quelles sont les valeurs de a pour lesquelle ce système n'admet pas de solution ?

A. $a \in \{-1, 0, 1\}$

B. $a \in \{-1, 1\}$

C. Ce système admet toujours au moins une solution quelque soit la valeur de $a \in \mathbb{R}$.

D. $a \in \{-1, 0\}$

Question 49 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application infiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annulant en cinq points distincts. Parmi les affirmations suivantes, une seule est juste, laquelle ?

A. f doit changer de signe.

B. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

C. (Ox) ne peut pas être tengeante à la courbe représentative de f'.

D. La dérivée quatrième de f s'annule au moins une fois.

Question 50 On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$ et Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Quelle est la variance de $2X + Y$?

A. 100

B. 10

C. 50

D. 5

Question 51 Soient $I(2,3)$, $M(3,4)$ et $M'(1+\sqrt{3}, 4+\sqrt{3})$ trois points du plan. M' est le transformé de M par une similitude de centre I. Que valent le rapport r et l'angle θ de cette similitude ?

A. $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

B. $r = 2\sqrt{5}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

C. $r = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

D. $r = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

Question 52 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

En dérivant cette application, on peut dire que :

A. $\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}$

B. $\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

C. f est constante sur $\mathbb{R}^*$

D. $\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = 0$

Question 53 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta).$$

Parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à la somme ci-dessus (on se souviendra de la formule $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}$) ?

A. $2^n \cos^n(\theta) \cos(2\theta)$

B. $2^n \cos(n\theta) \cos(2\theta)$

C. $\cos^n(\theta) \cos(2\theta)$

D. $2^n \cos^n(\theta) \cos(n\theta)$

Question 54 On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt.$$

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'une des relations de récurrence suivantes, laquelle ?

A. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+2}{n+1} I_n$

B. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = nI_n$

C. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n}{n+2} I_n$

D. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

Question 55 Pour résoudre l'équation différentielle suivante, sur le domaine $x \in]0, \infty[$

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y(e) = e \end{cases}$$

on peut utiliser le changement de variable $z(t) = y(e^t)$. Que vaut $y(2)$?

A. 2

B. 0

C. $2\ln(2)$

D. $\ln(2)$

Question 56 Les résultats d'un partiel d'une classe de 24 élèves sont répertoriés ci-dessous :

$$16,25 \quad 17,5 \quad 12 \quad 2,5 \quad 20 \quad 12,5 \quad 17 \quad 12,5 \quad 11 \quad 18,5 \quad 18,5 \quad 17$$

$$20 \quad 15,5 \quad 19,5 \quad 20 \quad 11 \quad 12 \quad 20 \quad 9,5 \quad 12,5 \quad 16,25 \quad 16,5 \quad 15,5$$

Quelle est la valeur du premier quartile (c'est à dire celui des notes les plus basses) de cette série de données ?

A. 12

B. 15.5

C. 16.25

D. 18.5

Question 57 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Cette suite

A. décroit et tend vers 0.

B. croit et tend vers $+\infty$.

C. est une suite constante.

D. n'a de limite ni finie, ni infinie.

Question 58 On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

le coefficient de la deuxième ligne, troisième colonne de la matrice inverse de A vaut

A. $-\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{90}$

C. $-\frac{1}{90}$

D. $\frac{1}{5}$

Question 59 Que vaut $(e^x \sin(x))^{(5)}(0)$?

A. -3

B. 5

C. -4

D. 0

Question 60 On dispose de deux pièces, l'une d'entre elle est truquée et comporte un double côté "face", tandis que l'autre est une pièce classique équilibrée. On demande à quelqu'un de choisir une pièce au hasard puis de tirer n fois cette pièce. L'expérience a conduit à donner n fois le côté face. Au minimum, combien faut-il de tirages pour être sûr à 95% que c'est la pièce truquée qui a été choisie ?

A. Il faut que n soit au minimum plus grand que $\frac{1}{\ln(2)} \approx 1,44$.

B. Il faut que n soit au minimum plus grand que $\frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2.3$.

C. Il faut que n soit au minimum plus grand que $\frac{2\ln(5)}{\ln(2)} \approx 4.64$.

D. Il faut que n soit au minimum plus grand que $\frac{3\ln(5)}{\ln(2)} \approx 6.96$.