



Ce sujet comporte deux problèmes indépendants. Le premier problème est consacré au calcul de la valeur d'une série et à son utilisation pour modéliser une expérience aléatoire. Le second problème est consacré à l'utilisation des séries de Fourier pour résoudre, dans un cas particulier, l'équation de propagation de la chaleur dans un solide conducteur à une seule dimension. Cette équation a été étudiée par Joseph Fourier en 1802.

I Séries et probabilités

Notations et rappels

Si $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n . On rappelle que, si $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et, si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Objectifs

Dans la sous-partie I.A, on montre que, pour tout $x \in]-1, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la sous-partie I.B, on utilise ce résultat pour étudier une expérience aléatoire.

I.A – Calcul de la somme d'une série

Dans les questions 1 et 2, k un entier naturel fixé.

Q 1. Montrer que : $\binom{n+1}{k} \sim \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.

Lorsqu'elle est définie, on note $S_k(x)$ la valeur de la somme $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.

Q 3. Rappeler sans démonstration le domaine de définition de la fonction S_0 et, pour tout réel x dans ce domaine, la valeur de $S_0(x)$.

Q 4. À l'aide d'un théorème de cours énoncé avec précision, justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q 5. Montrer que, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Q 6. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, $S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x)$.

Q 7. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, $S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

I.B – Étude d'une expérience aléatoire

On considère un dé équilibré comportant 1 face blanche et 5 faces noires. On réalise l'expérience aléatoire suivante.

1. On lance le dé jusqu'à obtenir la face blanche. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche.
2. Si N prend une valeur entière positive non nulle n lors de la première étape, on réalise alors une série de n lancers du dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face blanche a été obtenue lors de cette seconde série de lancers.

Q 8. Reconnaître la loi de la variable aléatoire N .

Q 9. Calculer, en explicitant les calculs, l'espérance et la variance de N .

Q 10. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, donner une expression de $P(N \leq n)$ en fonction de n qui ne fasse pas intervenir le symbole Σ .

Q 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En distinguant les cas $k \leq n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.

Q 12. Démontrer que $P(X = 0) = 5/11$, puis que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{36}{55} \left(\frac{5}{11} \right)^k.$$

Q 13. Vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Q 14. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Q 15. Calculer $E(X(X-1))$.

Q 16. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

II Séries de Fourier et équation de la chaleur

Rappels

Si F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, alors :

i) les coefficients de Fourier trigonométriques de F , $(a_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(F))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont définis par

$$\begin{cases} a_0(F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(t) dt, \\ a_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \cos(n\pi t) dt \quad \text{et} \quad b_n(F) = \int_{-1}^1 F(t) \sin(n\pi t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \end{cases}$$

ii) la série $\sum \left((a_n(F))^2 + (b_n(F))^2 \right)$ converge ;

iii) si F est continue et C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de F converge en tout nombre réel x et sa somme vaut $F(x)$.

II.A – Propriétés des coefficients de Fourier

Dans tout cette sous-partie, F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2. Sa dérivée est notée F' .

Q 17. Démontrer que :

- si la fonction F est paire, alors, pour tout entier naturel n non nul, $b_n(F) = 0$;
- si la fonction F est impaire, alors, pour tout entier naturel n , $a_n(F) = 0$.

Q 18. Démontrer que :

- si la fonction F est paire, alors sa dérivée F' est impaire ;
- si la fonction F est impaire, alors sa dérivée F' est paire.

Q 19. Démontrer que

$$\begin{cases} a_0(F') = 0, \\ a_n(F') = n\pi b_n(F) \quad \text{et} \quad b_n(F') = -n\pi a_n(F), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour les deux dernières égalités, on pourra effectuer une intégration par parties.

Q 20. En déduire que les deux séries $\sum n^2(a_n(F))^2$ et $\sum n^2(b_n(F))^2$ sont convergentes.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que la fonction F est périodique de période 2, impaire et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. On note $F^{(3)}$ sa dérivée troisième.

Q 21. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de $F^{(3)}$ en fonction de ceux de F .

Q 22. En déduire la nature de la série $\sum n^6(b_n(F))^2$.

Q 23. Pour deux réels quelconques a et b , démontrer que $|a| |b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Q 24. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2|b_n(F)| \leq \frac{1}{2} \left(n^6(b_n(F))^2 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Q 25. Quelle est la nature de la série $\sum n^2 b_n(F)$?

II.B – Un problème de prolongement

On suppose dans cette sous-partie que f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Q 26. Démontrer qu'il existe une unique fonction F , impaire, périodique de période 2, telle que

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = f(x).$$

Q 27. Décrire l'enchaînement des transformations géométriques qui permettent d'obtenir la courbe représentative de F à partir de celle de f .

Q 28. À l'aide d'arguments géométriques, justifier que la courbe représentative de la fonction F admet des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1 . Déterminer les coefficients directeurs de ces trois tangentes.

On admet pour la suite du problème que, si la fonction f est de classe C^3 sur $[0, 1]$ et vérifie

$$f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0,$$

où f'' désigne la dérivée seconde de f , alors la fonction F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

II.C – L'équation de la chaleur

On considère une barre rectiligne métallique de longueur 1 m. On suppose qu'au cours du temps la température de chacune de ses extrémités est maintenue à 0°C . On prend pour origine l'une des extrémités de la barre et on repère chaque point de la barre par son abscisse x (en mètre). On note $f(x)$ la température (en degrés Celsius) à l'instant $t = 0$ au point de la barre d'abscisse x . On suppose que la fonction f est de classe C^3 sur $[0, 1]$.

On note $\Delta = [0, +\infty[\times [0, 1]$. Pour $(t, x) \in \Delta$, on note $u(t, x)$ la température, à l'instant t , au point de la barre d'abscisse x . On admet que la fonction u vérifie l'équation de la chaleur

$$\forall (t, x) \in \Delta, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (\text{II.1})$$

Les conditions spécifiées dans l'énoncé imposent en plus les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0, x) = f(x) & \forall x \in [0, 1]. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les fonctions u solutions de l'équation (II.1) vérifiant de plus les conditions de régularité suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, +\infty[, \quad & \text{la fonction } g_t : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto u(t, x) \end{cases} \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } [0, 1]; \\ \forall x \in [0, 1], \quad & \text{la fonction } h_x : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto u(t, x) \end{cases} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, +\infty[. \end{aligned}$$

Q 29. Démontrer que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) = 0.$$

Q 30. Que peut-on en déduire pour les valeurs de $f''(0)$ et de $f''(1)$?

Q 31. Justifier que f est prolongeable en une unique fonction F impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On suppose que u est une solution du problème et on fixe $t \in [0, +\infty[$.

Q 32. Démontrer que la fonction g_t est prolongeable en une unique fonction G_t impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Q 33. Démontrer qu'il existe une suite $(\beta_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q 34. Exprimer $\beta_n(0)$ à l'aide de la fonction F .

Q 35. Justifier que la dérivée seconde de G_t , notée G_t'' , est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme.

Pour $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on note $U(t, x) = G_t(x)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction β_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, que la série $\sum |\beta_n'(t)|$ converge et que

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x).$$

Q 36. En déduire que,

$$\forall (t, x) \in \Delta, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

On admet que cette égalité entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, +\infty[$, l'égalité

$$\beta_n'(t) = -n^2 \pi^2 \beta_n(t).$$

Q 37. Donner l'ensemble des solutions, sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle $y'(t) + n^2 \pi^2 y(t) = 0$.

Q 38. En déduire que la solution cherchée est définie par

$$\forall (t, x) \in \Delta, \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Remarque. Il est possible, mais non demandé ici, de démontrer que cette fonction vérifie bien toutes les conditions imposées.

• • • FIN • • •
