

CCS TSI MATHS2 2020

Rémi Crétois, Éric Mercier, Michel Sortais

version du 2 juillet 2020

I Décompositions de matrices

I.A Un exemple introductif

Q 1. Un développement de $\det(P)$ suivant sa 2ème colonne permet de voir que

$$\det(P) = -(-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-9) = 27 \neq 0,$$

ce qui prouve bien que la matrice P est inversible. Donc la suite (c_1, c_2, c_3) des colonnes de P forme une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$, comme annoncé.

Q 2. • $u_1 = \frac{1}{\|c_1\|} \cdot c_1 = \frac{1}{3} \cdot c_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

• $v_2 = c_2 - \langle c_2; u_1 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

• $v_3 = c_3 - \langle c_3; u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle c_3; u_2 \rangle \cdot u_2 = c_3 - 0 \cdot u_1 - (-3) \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : la famille $(u_1; u_2; u_3)$ donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

forme une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Q 3. Tant la base canonique $\mathcal{B}$ que la nouvelle base $\mathcal{B}_2$ constituent des bases orthonormées pour le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$; donc les matrices de passage $Q = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2)$ et $Q^{-1} = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B})$ sont *orthogonales*, ce qui revient à dire que $Q^{-1} = Q^T$.

Q 4. On a $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$, et d'après les calculs effectués à la **Q2** :

• $u_1 = \frac{1}{3} \cdot c_1$, donc $c_1 = 3 \cdot u_1$,

• $u_2 = \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_1)$, donc $c_2 = 3 \cdot u_2 - 3 \cdot u_1$,

• $u_3 = \frac{1}{3} \cdot (c_3 + 3 \cdot u_2)$, donc $c_3 = 3 \cdot u_3 - 3 \cdot u_2$,
ainsi

$$R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{(u_1, u_2, u_3)}(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q 5. P est la matrice de changement de base où sont stockées (en colonnes) les coordonnées respectives de c_1, c_2 et c_3 dans la base canonique, autrement dit $P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1)$. En composant les changements de base, on obtient tout aussi bien

$$P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2) \times \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1),$$

soit $P = Q \times R$, ce qui est l'identité annoncée.

I.B Cas général : décomposition de QR

Q 6. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de la matrice P . Comme P est inversible, $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. En appliquant à cette base le procédé de Gram-Schmidt, on parvient à former une nouvelle base $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_k),$$

et cette dernière propriété géométrique se traduit algébriquement par le fait que la matrice de passage $R^{-1} = \text{coord}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$ est triangulaire supérieure. Sa matrice inverse $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$ est donc elle aussi *triangulaire supérieure*.

En outre, dans le procédé de Gram-Schmidt déjà mis en oeuvre à titre d'exemple dans la **Q2**, les identités

$$u_k = \frac{1}{\|v_k\|} \cdot v_k = \frac{1}{\|v_k\|} \cdot \left(c_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle c_k; u_j \rangle \cdot u_j \right)$$

donnent inversement :

$$c_k = \|v_k\| \cdot u_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle c_k; u_j \rangle \cdot u_j,$$

ce qui permet d'affirmer que tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$ sont bien *strictement positifs*.

Enfin, puisque les bases $\mathcal{B}$ (base canonique) et $\mathcal{B}_2$ sont toutes deux orthonormées, la matrice de passage $Q = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2)$ est bien une matrice *orthogonale*.

En conclusion, on peut affirmer que

$$P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2) \times \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) = Q \times R,$$

où Q est orthogonale, R triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs.

Q 7. L'équation donnée est alors équivalente à

$$Rx = Q^{-1}b = Q^T b = y$$

en posant $y = Q^T b = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$.

Comme R est triangulaire supérieure et à coeff. diagonaux strictement positifs, on pourra résoudre cette dernière équation "en remontant" : on commencera par observer que $x_n = \frac{1}{r_{n,n}} y_n$, ce qui permettra d'effectuer une substitution pour obtenir x_{n-1} à partir de l'identité $x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - r_{n-1,n} x_n)$, etc.

- Q 8.** Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de la matrice M , puis $C_1, C_2, \dots, C_n$ celles de la matrice I_n .
Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on dénote par $(\mathcal{H}_k)$ l'hypothèse

$$c_1 = C_1, c_2 = C_2, \dots, c_k = C_k$$

- *Initialisation* : montrons que $(\mathcal{H}_1)$ est vraie. Comme la matrice M est triangulaire supérieure, sa 1ère colonne est de la forme $c_1 = (m_{1,1}, 0, 0, \dots, 0)^T$, et comme M est orthogonale, cette 1ère colonne est normée, en sorte que $m_{1,1} = \pm 1$; enfin, puisque les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs, on doit avoir $m_{1,1} = 1$. Ainsi : $c_1 = (1\ 0\ 0 \dots 0)^T = C_1$, et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
- *Hérédité* : pour $k \in \llbracket 1; (n-1) \rrbracket$, supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$ est vérifiée, et montrons que cela entraîne la validité de $(\mathcal{H}_{k+1})$.
Comme M est triangulaire supérieure, sa $(k+1)$ ème colonne est de la forme

$$c_{k+1} = (m_{1,k+1}, m_{2,k+1}, \dots, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$$

Comme M est orthogonale, en prenant en compte l'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$, on obtient

$$m_{1,k+1} = \langle C_1; c_{k+1} \rangle = \langle c_1; c_{k+1} \rangle = 0, m_{2,k+1} = \langle C_2; c_{k+1} \rangle = \langle c_2; c_{k+1} \rangle = 0, \dots, m_{k,k+1} = \langle C_k; c_{k+1} \rangle = \langle c_k; c_{k+1} \rangle = 0,$$

en sorte que la $(k+1)$ ème colonne de M prend la forme $c_{k+1} = (0, 0, \dots, 0, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Toujours d'après l'orthogonalité de la matrice M , on doit avoir : $m_{k+1,k+1} = \pm 1$.

Enfin, comme M est à coefficients diagonaux strictement positifs, on obtient : $m_{k+1,k+1} = 1$, ce qui achève d'établir la validité de $(\mathcal{H}_{k+1})$.

- *Conclusion* : les deux points précédents permettent d'affirmer que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie, ce qui signifie que les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de la matrice M coïncident avec celles de la matrice I_n , autrement dit que $M = I_n$.

N.B. : alternativement, sans suivre les indications, on pouvait se contenter d'observer que $M^{-1} = M^T$ est encore triangulaire supérieure, en sorte que M est à la fois orthogonale et diagonale; mais alors, chacun des coeff. diagonaux de M se doit d'être de la forme $m_{i,i} = \pm 1$, et comme par ailleurs M est à coeff. diagonaux > 0 , on obtient bien $M = I_n$.

- Q 9.** Les matrices triangulaires R_1 et R_2 ayant chacune un déterminant strictement positif, elles sont toutes deux inversibles; l'identité $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ donne alors successivement $Q_1 = Q_2 R_2 R_1^{-1}$ puis $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Mais $Q_2^{-1} Q_1$ est une matrice orthogonale (comme produit de matrices orthogonales), tandis que $R_2 R_1^{-1}$ est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs, comme produit de 2 telles matrices. D'après la **Q8**, il s'ensuit que $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1} = I_n$, ce qui donne bien $Q_2 = Q_1$ et $R_2 = R_1$.

I.C Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

- Q 10.** Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice carrée A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. En appliquant alors la décomposition QR à la matrice inversible P , il vient

$$A = PTP^{-1} = (QR)T(R^{-1}Q^{-1}) = Q(RTR^{-1})Q^T = Q\tilde{T}Q^T,$$

et il reste à observer que $\tilde{T} = RTR^{-1}$ est bien triangulaire supérieure (comme produit de matrices triangulaires supérieures).

- Q 11.** Prenons pour matrice orthogonale Q une matrice déjà apparue dans la **Q3** :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et pour matrice triangulaire supérieure la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il est évident que la matrice carrée

$$A = QTQ^{-1} = QTQ^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 7/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, puisqu'elle possède trois valeurs propres distinctes ($Sp.(A) = Sp.(T) = \{1, 2, 3\}$). Toutefois, A n'est pas *orthogonalement* diagonalisable, puisqu'elle n'est pas symétrique.

N.B. : de façon plus minimaliste, on pouvait ici s'épargner quelques calculs en se contentant de poser $Q = I_3$.

Q 12. Ici encore, on pourrait procéder de façon (ultra) minimaliste en se contentant de poser : $A = Q = T = I_3$.

Alternativement, on pourra reprendre la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ et poser cette fois-ci $T =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui donne alors

$$A = QTQ^T = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}$$

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

II.A Méthode de quadrature

II.A.1 Détermination des poids (w_i)

Q 13. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Observons que :

- si $i \neq j$: j figure parmi les indices k tels que $k \neq i$, donc le facteur $(X - r_j)$ figure au sein du produit $\prod_{k \neq i} (X - r_k)$; puisque $(X - r_j) | A_i$, on a : $A_i(r_j) = 0$.
- si $i = j$: en remplaçant X par r_i , on obtient

$$A_i(r_i) = \prod_{k \neq i} \frac{r_i - r_k}{r_i - r_k} = 1$$

On a donc bien, dans tous les cas : $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Q 14. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{i=0}^n \alpha_i A_i = O_{\mathbb{R}_n[X]}$. D'après la question précédente, l'évaluation du

polynôme $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$ en r_j donne tout simplement

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Puisque P est le polynôme nul, on obtient

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

ce qui prouve la liberté de la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = (n+1)$, la famille libre $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ forme bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour un $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, puisque $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe une unique suite finie $(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $P = \sum_{i=0}^n c_i A_i$. A nouveau, une évaluation en r_j donne

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^n c_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^n c_i \delta_{i,j} = c_j,$$

en sorte que $P = \sum_{i=0}^n P(r_i) \cdot A_i$.

Q 15. Par hypothèse, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\int_{-1}^1 A_i(x) dx = \sum_{k=0}^n \omega_k A_i(r_k).$$

On applique ensuite la question 13 :

$$\boxed{\int_{-1}^1 A_i(x) dx = \omega_i}.$$

Q 16. D'après la question précédente, si les réels $\omega_0, \dots, \omega_n$ conviennent, alors ils valent pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\omega_i = \int_{-1}^1 A_i(x) dx. \text{ Il n'y a donc qu'une seule possibilité pour chaque } \omega_i.$$

Q 17. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question 14,

$$P = \sum_{i=0}^n P(r_k) A_i.$$

Ainsi, en posant pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\omega_i = \int_{-1}^1 A_i(x) dx$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega_k P(r_k) &= \sum_{k=0}^n P(r_k) \int_{-1}^1 A_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n P(r_k) A_k(x) dx && \text{en utilisant la linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_{-1}^1 P(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est bien vérifiée pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n .

Q 18. Lorsque $n = 0$, $A_0(X) = 1$ car on a un produit sans terme. Puis $\omega_0 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$.

Ainsi, $\boxed{\Sigma_r(f) = 2f(0)}$ car $r_0 = 0$. Si f est positive sur $[-1, 1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du rectangle dont un des côtés est $[-1, 1]$ et l'autre est de longueur $f(0)$.

Q 19. Lorsque $n = 1$, $r_0 = -1$ et $r_1 = 1$, on a :

$$A_0(X) = \frac{X - r_1}{r_0 - r_1} = -\frac{1}{2}(X - 1), \quad A_1(X) = \frac{X - r_0}{r_1 - r_0} = \frac{1}{2}(X + 1).$$

Puis,

$$\omega_0 = \int_{-1}^1 A_0(x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 = 1$$

$$\omega_1 = \int_{-1}^1 A_1(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = 1$$

Ainsi, $\Sigma_r(f) = f(-1) + f(1)$. Si f est positive sur $[-1, 1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du trapèze rectangle de bases $f(-1)$ et $f(1)$ et de hauteur 2.

II.A.2 Majoration de l'erreur

Q 20. La fonction Q_r est polynomiale donc continue sur $[-1, 1]$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$.

Comme $|Q_r|$ et $|f^{(n+1)}|$ sont continues sur le segment $[-1, 1]$ elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Donc $N(f^{(n+1)})$ et $N(Q_r)$ sont bien définis.

Q 21. D'une part, $T_{r,f} \in \mathbb{R}_n[X]$ car c'est une combinaison linéaire des A_i et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $T_{r,f}(r_i) = \sum_{k=0}^n f(r_k) A_k(r_i) = f(r_i)$ d'après la question **Q13**.

D'autre part, soit U un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $U(r_i) = f(r_i)$ pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, d'après la question **Q14**, $U = \sum_{k=0}^n U(r_k) A_k = \sum_{k=0}^n f(r_k) A_k = T_{r,f}$. On a donc bien l'unicité de $T_{r,f}$.

Q 22. Par hypothèse, il existe $-1 < x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < 1$, $n+2$ réels distincts tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $g(x_i) = 0$.

Pour chaque $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction g est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ car g est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et $n \geq 0$. Comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(y_i) = 0$.

Ainsi, la fonction g' s'annule aux $n+1$ points y_i pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ qui sont bien distincts car dans des intervalles disjoints.

Q 23. Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$.

— Initialisation : c'est la question **Q22**.

— Hérédité : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et supposons que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. La fonction $h = g^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-k+1}$ sur $[-1, 1]$, avec $n-k \geq 0$ et s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. D'après la question 22, la fonction h' s'annule en au moins $n+2-(k+1)$ points distincts de $[-1, 1]$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. En particulier, pour $k = n+1$, $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point de $[-1, 1]$.

Q 24. Si $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$, on a $T_{r,f}(x) = f(x)$ d'après la question 21. En particulier, $f(x) - T_{r,f}(x) = 0$ et l'inégalité (II.1) est bien vérifiée car le membre de droite est positif ou nul.

Q 25. Comme $x \notin \{r_0, \dots, r_n\}$, $Q_r(x) \neq 0$. En posant $\lambda_x = \frac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)}$ on obtient bien que

$$g_x(x) = f(x) - T_{r,f}(x) - \frac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)} Q_r(x) = 0.$$

Q 26. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et $T_{r,f}$ et Q_r sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$, la fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$g_x(r_i) = f(r_i) - T_{r,f}(r_i) - \lambda_x Q_r(r_i) = f(r_i) - f(r_i) = 0.$$

Donc g s'annule aux $n+2$ points $\{x, r_0, r_1, \dots, r_n\}$ qui sont distincts dans $[-1, 1]$.

D'après la question 23, il existe un réel $c_x \in [-1, 1]$ tel que $g_x^{(n+1)}(c_x) = 0$.

Or, le polynôme $T_{r,f}$ est de degré inférieur ou égal à n , donc $T_{r,f}^{(n+1)} = 0$. De plus, le polynôme Q_r est de degré $n+1$ et son terme dominant est X^{n+1} , donc $Q_r^{(n+1)} = (n+1)!$.

Ainsi,

$$0 = g_x^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - \lambda_x (n+1)! \iff \lambda_x = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

D'après la question 24, l'inégalité (II.1) est vérifiée si $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$. Sinon, $f(x) - T_{r,f}(x) = \lambda_x Q_r(x) = \frac{Q_r(x) f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Ainsi,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| = \frac{|Q_r(x)| |f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!} \leq \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}.$$

L'inégalité (II.1) est donc toujours vérifiée.

Q 27. On remarque que $\Sigma_r(f) = \Sigma_r(T_{r,f})$ d'après la question 21. Puis, d'après la question 17, $\Sigma_r(T_{r,f}) = \int_{-1}^1 T_{r,f}(x) dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |I(f) - \Sigma_r(f)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x) - T_{r,f}(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x) - T_{r,f}(x)| dx \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$|I(f) - \Sigma_r(f)| \leq 2 \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}.$$

II.B Choix d'un jeu de nœuds

II.B.1 Nœuds équi-distants

Q 28. Comme les nœuds sont équi-distants avec $s_0 = -1$ et $s_n = 1$, on a $s_k = -1 + k \frac{2}{n} = -1 + kh$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puis, avec $x = -1 + th$,

$$\begin{aligned} |Q_s(x)| &= \left| \prod_{k=0}^n (x - s_k) \right| \\ &= \prod_{k=0}^n |(-1 + th + 1 - kh)| \\ &= h^{n+1} \prod_{k=0}^n |t - k| \end{aligned}$$

Donc $|Q_s(x)| = h^{n+1} \varphi_{n+1}(t)$.

Q 29. La fonction φ_{n+1} est la valeur absolue d'une fonction polynomiale, donc est continue sur le segment $[0, n]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum. On remarque ensuite que si φ_{n+1} atteint son maximum en x_m , alors soit $x_m \in [0, n/2]$, et il n'y a rien à démontrer, soit $x_m \in [n/2, n]$, et alors $n - x_m \in [0, n/2]$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(n - x_m) &= \prod_{k=0}^n |n - x_m - k| \\ &= \prod_{k=0}^n |x_m - (n - k)| && \text{en changeant tous les signes dans les valeurs absolues} \\ &= \prod_{i=0}^n |x_m - i| && \text{en faisant le changement d'indice } i = n - k \\ &= \varphi_{n+1}(x_m).\end{aligned}$$

Donc φ_{n+1} atteint aussi son maximum sur $[0, n/2]$.

Q 30. ATTENTION, il y a une erreur dans le sujet!

Le max à démontrer dans le sujet est celui de φ_3 **et non** de φ_2 .

Erreur d'indiciage puisque on définit φ_{n+1}

On détermine donc dans ce corrigé le max de φ_3 :

$$\varphi_3 : t \mapsto |t(t-1)(t-2)|$$

Sur $[0, 1]$, $t \mapsto t(t-1)(t-2)$ est positive donc $\varphi_3(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$ et alors $\varphi'_3(t) = 3t^2 - 6t + 2$ dont l'étude du signe sur $[0, 1]$ permet de dresser le tableau de variations de φ_3 .

x	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	1
φ'_3	+	0	-
φ_3	0	$\varphi_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	0

Sur $[0, 1]$; le maximum de φ_3 est donc $\max_{[0,1]} \varphi_3 = \varphi_3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Remarque : Il est encore plus facile de démontrer que $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$: **ce qui est nécessaire pour la récurrence suivante!**

Q 31. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on démontre par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4}(n-1)!$ ».

— *Initialisation :*

Pour $n = 1$, la question précédente **ne fournit pas** : $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\frac{1}{4}(1-1)! = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_1$.

En revanche, on a démontré à la **Q30** que $\max_{[0,2]} \varphi_3 \geq \max_{[0,1]} \varphi_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq \frac{1}{4}(2-1)! = \frac{1}{4}$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_2$, qui est inutile pour la suite...

— *Hérédité :*

Pour un certain entier non nul n , on suppose la propriété $\mathcal{P}_n$, c'est à dire, $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4}(n-1)!$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_1$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \max_{[0, n+1]} \varphi_{n+2} &\geq \max_{[0, n]} \varphi_{n+2}(t) \\
 &\geq \max_{[0, n]} (\varphi_{n+1}(t) \times |t - (n+1)|) \\
 &\geq (n+1) \max_{[0, n]} \varphi_{n+1}(t) \\
 &\geq n \times \frac{1}{4} (n-1)! \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &\geq \frac{1}{4} n!
 \end{aligned}$$

— *Conclusion :*

On a démontré par récurrence que pour tout entier n : $\max_{[0, n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4} (n-1)!$.

Q 32. D'après **Q28**, $|Q_s(x)| = h^{n+1} \varphi_{n+1}(t)$, on en déduit donc la minoration :

$$N(Q_s) \geq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \frac{(n-1)!}{4} = \frac{2^{n-1} (n-1)!}{n^{n+1}}$$

II.B.2 Zéros des polynômes de Tchebychev

Q 33. La fonction $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$. Par composition, la fonction T_n est définie sur $[-1, 1]$.

Q 34. Soit $x \in [-1, 1]$:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4 \cos^3(\arccos x) - 3 \cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x$$

Q 35. Soit n un entier naturel,,

$$T_n(-1) = \cos(n \arccos(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$T_n(0) = \cos(n \arccos(0)) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \Re(i^n)$$

$$T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(n \times 0) = 1$$

Q 36. T_n est définie sur $[-1, 1]$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.

Pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
 T_n(-x) &= \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n \times (\pi - \arccos(x))) \\
 &= \cos(n\pi - n \arccos(x)) \\
 &= \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) = T_n(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\cos(n \arccos(x)) = -T_n(x) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

Si n est pair, T_n est paire, si n est impair, T_n est impaire.

Q 37. Soit x un réel de $[-1, 1]$ et n un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\arccos(x)\right)\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\arccos(x)\right) \\ &= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ &= 2xT_n(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)}$$

Q 38. On démontre par une récurrence double la propriété $\mathcal{P}_n$: « T_n est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} », pour n un entier non nul.

— *Initialisation* :

On vérifie la propriété pour les fonctions T_1 , T_2 , et T_3 déterminées à la question **Q34**.

— *Hérédité* : On suppose, pour un certain entier n non nul, que les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

On utilise la relation de récurrence déterminée dans la question **Q37** pour obtenir, pour tout réel $x \in [-1, 1]$:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

T_{n+1} et T_n étant des fonctions polynomiales, on en déduit que T_{n+1} est une fonction polynomiale.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, T_{n+1} est une fonction polynomiale, dont le degré est $\deg T_{n+1} = n+1$ et son coefficient dominant est 2^n .

Pour tout polynôme P et Q , $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, on en déduit que $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ et le coefficient dominant du polynôme $2XT_{n+1}$ est 2^{n+1} .

Comme $\deg T_n = n-1 < \deg 2XT_{n+1}$, comme $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et que cette inégalité est stricte si $\deg P \neq \deg Q$, on obtient :

$$\boxed{T_{n+2} \text{ est une fonction polynomiale, } \deg T_{n+2} = n+2 \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n+1}}$$

— *Conclusion* : Par cette récurrence double, nous avons montré que pour tout entier n non nul, T_n est une fonction polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} .

Il reste à préciser que T_0 est une fonction polynomiale de degré 0 et que son coefficient est 1.

Remarque : Comme les fonctions sont polynomiales, on peut étendre leur domaine de définition à $\mathbb{R}$.

Q 39. Soit n un entier, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = 0 &\Leftrightarrow (n+1)\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2n+2} + \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On pose $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ avec $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, et $x_k = \cos \theta_k$.

On a alors : $0 < \theta_0 = \frac{\pi}{2n+2} < \theta_1 < \dots < \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n+2} < \pi$.

La fonction $\cos$ étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$ on a alors :

$$-1 < \cos \theta_n < \dots < \cos \theta_0 < 1 \Leftrightarrow -1 < x_n < \dots < x_0 < 1$$

Nous savons que le polynôme T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Le nombre de racines de ce polynôme est donc majoré par son degré, or, nous avons déterminé $n+1$ racines distinctes, donc l'ensemble de ses racines. En conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } T_{n+1} \text{ sont dans } [-1, 1] \text{ ce sont les réels : } x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) \text{ avec } k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket .}$$

Q 40. T est un vecteurs de réels de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sur cet intervalle, $\arccos \cos \theta = \theta$, U est donc un vecteur de réels de $[-1, 0]$ et $Y = \cos(nT)$ le vecteur contenant les images des composantes de U par T_n .

def Tchebychev(n):

$T = \text{np.linspace}(\text{np.pi}/2, \text{np.pi}, 1000)$

$U = \text{np.cos}(T)$

$Y = \text{np.cos}(n*T)$

 return U, Y

Q 41. — Pour la courbe 1 : La fonction polynomiale vaut -1 en -1 donc n est impair. La fonction polynomiale est donc impaire et T_n admet donc 5 racines, donc ce cas correspond à $n = 5$.

— Pour la courbe 2 : C'est la courbe d'une fonction paire car $T_n(-1) = -1$, ce polynôme admet donc 8 racines, il s'agit donc du cas $n = 8$.

Q 42. On considère le jeu de noeuds $c = \left(c_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2n+2}\right), c_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2n+2}\right), \dots, c_n = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n+2}\right)\right)$.

$$Q_c = \prod_{k=0}^n (X - c_k) = \frac{1}{2^n} \times T_{n+1}$$

De plus, pour x dans $[-1, 1]$, $T_{n+1}(x) = \cos(\arccos(x)) \in [-1, 1]$ et $T_{n+1}(1) = 1$, on a : $\max_{x \in [-1, 1]} |T_{n+1}(x)| = 1$, finalement :

$$N(Q_c) = \frac{1}{2^n} \max_{x \in [-1, 1]} |T_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

II.B.3 Comparaison des ces deux jeux de noeuds

Q 43. D'après les question précédentes et en utilisant la formule de Stirling admise :

$$\begin{aligned} \frac{N(Q_c)}{N(Q_s)} &\leq \frac{1}{2^n} \frac{n^{n+1}}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{n^{n+1}}{2^{2n-1}(n-1)!} \\ &\sim \frac{n^{n+1}}{2^{2n-1} \times \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} \\ &\sim \frac{n}{2^{2n-1} \times \sqrt{2\pi n} e^{-n}} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^{n(2\ln(2)-1)}} \end{aligned}$$

Comme $2\ln(2) - 1 > 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(Q_c)}{N(Q_s)} = 0$ d'après les théorèmes de comparaison.

Q 44. On a $N(Q_c) = o(N(Q_s))$

L'estimation est donc meilleure avec le jeu de noeuds c qu'avec le jeu de noeuds s .

• • • FIN • • •