



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

# PROBLÈME 1

**Application sur  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Phi : P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$**

Le but de cet exercice est l'étude de l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  avec  $n$  un entier fixé non nul par :

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.

On note pour tout  $k$  entier non nul  $\Phi^k$  la composée  $k$ -ième de l'application  $\Phi$ .

## Partie I - Préliminaires

**Q1.** Donner la formule du binôme de Newton.

**Q2.** Soit  $k$  un entier non nul. Montrer que :

$$(X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i.$$

**Q3.** On considère les polynômes  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ ,  $P_2(X) = X^2$  et  $P_3(X) = X^3$ .  
Montrer que :

$$\Phi(P_0)(X) = 0,$$

$$\Phi(P_1)(X) = 1,$$

$$\Phi(P_2)(X) = 2X + 1,$$

$$\Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1.$$

**Q4.** Calculer  $\Phi^2(P_2)(X)$  et  $\Phi^3(P_2)(X)$ .

**Q5.** Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q6.** Montrer que pour tout polynôme non constant  $P$  de degré  $k$  avec  $k$  un entier non nul,  $\Phi(P)$  est un polynôme de degré  $k - 1$ .

**Q7.** Calculer le noyau de  $\Phi$ .

**Q8.** Donner l'image de  $\Phi$ .

**Q9.** Soient  $P$  et  $Q$ , deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , tels que  $\Phi(Q) = P$ .  
Montrer que :

$$\sum_{i=0}^n P(i) = Q(n + 1) - Q(0).$$

## Partie II - Une famille de polynômes

**Q10.** Considérons la famille  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  où pour chaque  $i$  non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (X-k)}{i!}$$

et  $H_0 = P_0$  le polynôme constant égal à 1.

Prouver que  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

**Q11.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $H_i(0) = 0$ .

**Q12.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi(H_i) = H_{i-1}$ .

**Q13.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi^i(H_i) = 1$ .

**Q14.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$  avec  $a_k$  réel pour tout  $k$  entier entre 0 et  $n$ .

Montrer que  $P(0) = a_0$  et que pour  $l$ , un entier fixé entre 1 et  $n$ ,  $a_l = \Phi^l(P)(0)$ .

**Q15.** En déduire que tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

**Q16.** Vérifier que  $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$ .

**Q17.** Déduire à l'aide de **Q9**, de **Q12** et de **Q16** que :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Q18.** Vérifier que  $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$ .

**Q19.** En déduire que  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Q20.** Proposer en **Python** une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des  $n$  premiers entiers prenant en argument un entier naturel  $n$  passé en paramètre.

## PROBLÈME 2

### Trajectoires orthogonales

**Le problème ne nécessite aucune connaissance sur les courbes orthogonales.**

Soient  $(S)$  un plan et  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de courbes tracées sur  $(S)$ ,  $\Lambda$  étant un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On appelle **trajectoire orthogonale** de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sur  $(S)$ , toute courbe  $C$ , tracée sur  $(S)$  et coupant orthogonalement chacune des  $\Gamma_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ).

On se place dans la situation suivante.

Soit  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de courbes du plan. Chaque courbe  $\Gamma_\lambda$  est la courbe représentative d'une fonction  $y$  d'une variable réelle  $x$  de classe  $C^1$  qui vérifie une équation différentielle :

$$(ED) \quad f(x, y, y') = 0$$

appelée équation différentielle du premier ordre de la famille de courbes  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

On admet qu'une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est :

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

On remplace donc  $y'$  par  $-\frac{1}{y'}$  dans  $(ED)$ . On caractérisera les courbes orthogonales à la famille  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  par les solutions de l'équation  $(EDO)$ .

On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel et du repère orthonormé usuel  $(O, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  est la base orthonormée directe usuelle  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Nous allons montrer sur un exemple qu'il est possible de se ramener au plan  $(xOy)$  d'équation  $z = 0$ .

On considère le plan  $(S)$  d'équation :

$$(E) : \quad x + y + z = 0.$$

### Partie I - Quelques calculs dans le plan $S$

- Q21.** Montrer que l'origine  $O$  et les points  $M, N$  de coordonnées respectives  $(1, 0, -1)$  et  $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$  appartiennent au plan  $(S)$ .
- Q22.** Démontrer que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$  forment une base du plan  $(S)$ .
- Q23.** Calculer le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$ .
- Q24.** Donner une interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel des vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$ .
- Q25.** Montrer que le point  $A$  de coordonnées  $(0, 1, 1)$  n'appartient pas au plan  $(S)$ .
- Q26.** Calculer le produit mixte des vecteurs  $\vec{OM}, \vec{ON}$  et  $\vec{OA}$ .
- Q27.** Donner une interprétation géométrique du produit mixte des vecteurs  $\vec{OM}, \vec{ON}$  et  $\vec{OA}$ .
- Q28.** Donner un vecteur normal au plan  $(S)$ .
- Q29.** Donner les coordonnées du projeté orthogonal  $A'$  de  $A$  sur le plan  $(S)$ . On pourra réaliser un schéma pour expliciter la démarche utilisée.
- Q30.** Calculer la distance du point  $A$  au plan  $(S)$ .

## Partie II - Changement de repère

On souhaite effectuer un changement de base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  de telle sorte qu'une équation du plan  $(S)$  soit définie  $z = 0$  dans l'espace affine muni de la nouvelle base orthonormée directe.

On considère la famille  $\mathcal{B}'$  formée par les vecteurs :

$\vec{u}_x$  de coordonnées  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\vec{u}_y$  de coordonnées  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$  et  $\vec{u}_z$  de coordonnées  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

- Q31.** Montrer que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Q32.** Montrer que la base  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale.
- Q33.** Montrer que la base  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale directe.
- Q34.** Donner la matrice de passage  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
- Q35.** Justifier que la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}'$  vers la base  $\mathcal{B}$  est :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

- Q36.** Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  a pour coordonnées  $(0, 0, \sqrt{3})$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- Q37.** Justifier que l'équation du plan  $(S)$  dans le repère  $(O, \mathcal{B}')$  est  $z = 0$ .
- Q38.** Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni du repère  $(O, \mathcal{B}')$ , donner la matrice  $R$  de la projection orthogonale sur le plan  $(S)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- Q39.** Donner la relation permettant d'obtenir la matrice  $Q$  de la projection orthogonale sur le plan  $(S)$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de  $R$ ,  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$  et  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ . On admet que l'on obtient après calculs :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Q40.** Justifier que  $Q$  est diagonalisable. Sans calcul et à l'aide des questions précédentes, justifier que les valeurs propres sont 0 et 1.
- Q41.** Montrer que l'espace propre associé à la valeur 1 est engendré par les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$ . On rappelle que les points  $M$  et  $N$  sont définis à **Q21**.

On admet que le travail effectué dans cette partie peut être aussi réalisé pour un plan quelconque. Dans la suite de tout le problème, le plan  $(S)$  aura pour équation  $z = 0$ .

### Partie III - Soit $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille des droites du plan $(S) : z = 0$ passant par l'origine. Détermination des trajectoires orthogonales de la famille de droites $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$

L'espace est rapporté à son repère habituel. On considère le plan  $(S)$  d'équation  $z = 0$ . Il est possible, en toute généralité, de se placer dans le cas où  $(S)$  est le plan d'équation  $z = 0$  dans la base usuelle de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q42.** Déterminer l'équation dans le plan  $(S) : z = 0$  de la droite  $D_\lambda$  passant par l'origine  $O$  et par le point  $M_\lambda$  de coordonnées  $(1, \lambda, 0)$  avec  $\lambda$  réel. Faire un dessin mettant en jeu  $D_\lambda$ ,  $O$  et  $M_\lambda$  pour expliquer la situation.

**Q43.** En déduire que la famille de courbes  $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  admet pour équation différentielle du premier ordre :

$$(ED_1) \quad y - xy' = 0.$$

**Q44.** En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème 2, démontrer que les courbes orthogonales ont pour équation différentielle :

$$(EDO_1) \quad y'y + x = 0.$$

**Q45.** Soit  $\mu$  un réel positif. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction :

$$f_\mu : x \mapsto \sqrt{\mu - x^2}.$$

**Q46.** Montrer que la fonction  $f_\mu$  est solution de  $(EDO_1)$  sur  $] -\sqrt{\mu}; 0[ \cup ]0; \sqrt{\mu}[$ .

**Q47.** Montrer que les trajectoires orthogonales obtenues vérifient l'équation :

$$(EC_1) \quad x^2 + y^2 = \mu \quad \text{avec } \mu \text{ un réel positif non nul.}$$

**Q48.** Donner la nature géométrique des courbes avec leurs éléments caractéristiques vérifiant l'équation  $(EC_1)$ .

### Partie IV - Détermination des trajectoires orthogonales de la famille des hyperboles équilatères $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ du plan $(S)$

On considère la courbe paramétrée  $C$  d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos(t)} \\ y(t) = \tan(t) \end{cases}.$$

**Q49.** Proposer un ensemble d'étude de la courbe paramétrée  $C$  en justifiant votre démarche.

**Q50.** Étudier la courbe paramétrée  $C$  sur l'ensemble  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . On indiquera en justifiant les tangentes parallèles aux axes le cas échéant.

**Q51.** Tracer sur votre copie dans un repère orthonormé d'unité 1 cm les droites d'équation  $D : y = x$  et  $D' : y = -x$ .  
On admet que ce sont les asymptotes à la courbe.

**Q52.** Montrer que  $D$  et  $D'$  sont orthogonales.

**Q53.** Tracer la courbe  $C$  sur le graphique précédent réalisé à la **Q51**.

Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes forment un angle droit. L'équation caractéristique des hyperboles équilatères dont la famille est notée  $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est :

$$(EC_2) \quad x^2 - y^2 + \lambda y = 1.$$

**Q54.** Trouver la valeur de  $\lambda$  pour que  $C$  vérifie l'équation  $(EC_2)$ .

**Q55.** Démontrer que famille  $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  admet pour équation différentielle :

$$(ED_2) \quad 2xy + (1 - x^2 - y^2)y' = 0.$$

**Q56.** En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème et rappelé ici :

*Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est :*

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Démontrer que les courbes orthogonales à la famille  $(H_\lambda)$  ont pour équation différentielle :

$$(EDO_2) \quad 2xyy' - 1 + x^2 + y^2 = 0 \text{ avec } y' \neq 0.$$

**Q57.** En prenant la fonction  $z = y^2$ , justifier que  $z$  est de classe  $C^1$ , montrer que l'équation  $(EDO_2)$  peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1) \quad xz' + z - 1 + x^2 = 0.$$

**Q58.** Trouver une solution particulière de  $(E_1)$  sous forme polynomiale.

**Q59.** Résoudre  $(E_1)$ .

**Q60.** Dédurre que les courbes orthogonales  $(C_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$  à la famille  $(H_\lambda)$  vérifient l'équation :

$$x(x^2 + 3y^2 - 3) - 3\mu = 0.$$

**FIN**

