

# CCS TSI MATHS1 2022

Florian Bouguet, Éric Mercier

version du 6 mai 2022

## I Exponentielle réelle

### I.A Une équation fonctionnelle

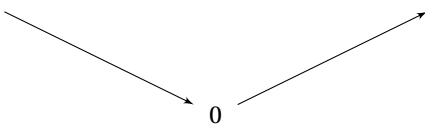
- Q 1.** La fonction  $x \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donc de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
De plus,  $e^1 = e$  et pour tout couple de réels  $(s, t)$ , on vérifie bien :  $e^{s+t} = e^s \times e^t$ .  
La fonction exponentielle est donc une solution de (I.1).
- Q 2.** Soit  $x$  un réel, d'après (I.1), on a :  $f(x)f(1-x) = f(x+1-x) = f(1) = e$ .
- Q 3.** D'après **Q2**, pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est non nul.  
 $f$  étant supposée continue et non nulle sur  $\mathbb{R}$ , la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que  $f$  est d'un signe constant sur  $\mathbb{R}$ , or,  $f(1) = e > 0$ . en conclusion,  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .
- Q 4.** Toujours à l'aide de la **Q2**, avec  $x = 0$ , on obtient  $f(0)f(1) = e \iff f(0) = 1$ .
- Q 5.** Pour tout réel  $t$  fixé, la fonction  $\varphi : s \mapsto f(s+t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables.  
De plus, pour tout réel  $s$ ,  $\varphi(s) = f(s+t) = f(s)f(t)$ , d'où la dérivée de  $\varphi : \varphi'(s) = f'(s+t) = f'(s)f(t)$ .
- Q 6.** En conclusion, pour  $s = 0$ , pour tout réel  $t$ , la fonction  $f$  vérifie :  $f'(t) = f'(0)f(t)$ .  
Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants sont les fonctions  $t \mapsto ke^{f'(0)t}$ .
- Q 7.** On sait que  $f(0) = 1$  ce qui équivaut à  $k = 1$ .  
 $k$  est non nul puisque la fonction nulle n'est pas solution de (I.1), on a donc  $k = 1$ .  
De plus, comme  $f(1) = e$ , il vient immédiatement  $f'(0) = 1$ .  
Finalement la fonction  $f$  est donc solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f'(t) &= f(t) \end{cases}$$

- Q 8.** L'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$ .
- Q 9.** La fonction exponentielle (cours) est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ , avec un rayon de convergence infini et il est donné par :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

### I.B Un problème de probabilité faisant intervenir l'exponentielle réelle

- Q 10.** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{-x} - 1 + x$ .  
 $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = 1 - e^{-x}$ .  
La fonction  $x \mapsto 1 - e^{-x}$  est strictement croissante et s'annule en 0, on en déduit donc le signe de  $h'$  et les variations de  $h$ .

|      |                                                                                      |   |           |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$                                                                            | 0 | $+\infty$ |
| $h'$ | -                                                                                    | 0 | +         |
| $h$  |  |   |           |

On en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  :

$$h(x) > 0 \iff e^{-x} > 1 - x.$$

**Q 11.** Soient  $\theta$  et  $\alpha$  deux réels strictement positifs, alors,  $-\alpha\theta < 0$  donc  $0 < 1 - e^{-\alpha\theta}$  et d'après la question précédente :  $1 - e^{-\alpha\theta} < \alpha\theta$ .

Finalement :

$$0 < p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} < 1$$

**Q 12.** Soit  $(k, s) \in \mathbb{N}^2$ ,

- Si  $s < k$  alors  $\mathbb{P}_{(N_\theta=s)}(R_\theta = k) = 0$  car il est impossible qu'il y ait davantage de patients encore présents après l'instant  $\theta$  que de patients arrivés dans l'intervalle  $[0, \theta]$ .
- Pour  $k \leq s$ , il s'agit de choisir  $k$  patients parmi  $s$ , sans ordre ni répétition. Il s'agit d'une répétition indépendante, comme le souligne le texte, d'épreuves de Bernoulli, dont la probabilité de succès est  $p$ . On obtient donc :

$$\mathbb{P}_{(N_\theta=s)}(R_\theta = k) = \binom{s}{k} p^k q^{s-k}$$

**Q 13.** On suppose dans cette question  $k \leq s$ , il vient alors (formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)) &= \mathbb{P}(N_\theta = s) \mathbb{P}_{(N_\theta=s)}(R_\theta = k) \\ &= \frac{\theta^s e^{-\theta}}{s!} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} \\ &= \frac{\theta^s e^{-\theta}}{s!} \frac{s!}{k!(s-k)!} p^k q^{s-k} \\ &= \frac{\theta^s e^{-\theta} p^k q^{s-k}}{k!(s-k)!} \\ &= \frac{\theta^k \theta^{s-k} e^{-\theta} p^k q^{s-k}}{k!(s-k)!} \\ &= \frac{(p\theta)^k (q\theta)^{s-k} e^{-\theta}}{k!(s-k)!} \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat annoncé.

**Q 14.** On utilise ici le système complet d'événements infini  $(N_\theta = s)_{s \in \mathbb{N}}$  et la formule des probabilités totales pour déterminer la loi marginale  $R_\theta$  du couple  $(N_\theta, R_\theta)$ , on a donc :

$$\mathbb{P}((R_\theta = k)) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \mathbb{P}((R_\theta = k) \cap (N_\theta = s))$$

Cette probabilité est nulle pour  $s \leq k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=0}^k 0 + \sum_{s=k}^{+\infty} \frac{(p\theta)^k (q\theta)^{s-k} e^{-\theta}}{k!(s-k)!} \\ &= \frac{(p\theta)^k e^{-\theta}}{k!} \sum_{s=k}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{s-k}}{(s-k)!} \\ &= \frac{(p\theta)^k e^{-\theta}}{k!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(q\theta)^s}{(s)!} \end{aligned}$$

On reconnaît ici le développement en série entière de la fonction exponentielle de rayon  $+\infty$

$$\begin{aligned} &= \frac{(p\theta)^k e^{-\theta}}{k!} e^{q\theta} \\ &= \frac{(p\theta)^k e^{(q-1)\theta}}{k!} = \frac{(p\theta)^k e^{-p\theta}}{k!} \end{aligned}$$

**Q 15.** D'après la question précédente,  $R_\theta$  suit la loi de Poisson de paramètre  $p\theta$  son espérance est donc  $E(R_\theta) = p\theta$ .

## II Forme exponentielle des fonctions trigonométriques

**Q 16.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Alors

$$z(t+2\pi) = \frac{2e^{i(t+2\pi)} + e^{-2i(t+2\pi)}}{3} = \frac{2e^{it}e^{2i\pi} + e^{-2it}e^{-4i\pi}}{3} = z(t),$$

$$z(-t) = \frac{2e^{-it} + e^{2it}}{3} = \frac{2\overline{e^{it}} + \overline{e^{-2it}}}{3} = \overline{z(t)}.$$

**Q 17.** D'après la question précédente, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les points  $M(t+2\pi)$  et  $M(t)$  sont égaux. On restreint donc l'intervalle d'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ , les points  $M(-t)$  et  $M(t)$  ont des affixes conjuguées, ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$  et il suffira de faire la symétrie de la courbe partielle par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe totale. On choisit donc  $\gamma = \pi$ .

**Q 18.** La fonction  $z$  est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $t \in [-\pi, \pi]$ . Alors

$$z'(t) = 0 \iff \frac{2ie^{it} - 2ie^{-2it}}{3} = 0 \iff e^{it} = e^{-2it} \iff t \equiv -2t \pmod{2\pi} \iff 3t \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$\iff t \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}} \iff t \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Ainsi les points  $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $M(0)$  et  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  sont stationnaires.

**Q 19.** Calculons les affixes des trois points stationnaires. D'après **Q 16**,

$$z(0) = \frac{2e^0 + e^0}{3} = 1,$$

$$z\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{3} = \frac{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$z\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \overline{z\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

On remarque que  $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $M(0)$  et  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  ont pour affixes les racines troisièmes de l'unité, et forment donc un triangle équilatéral.

**Q 20.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Alors

$$z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2e^{i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-2i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)}}{3} = \frac{2e^{it}e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-2it}e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{3} = z(t) \times e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

**Q 21.** On déduit de la question précédente que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le point  $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$  est l'image du point  $M$  par la rotation  $\rho$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Cette rotation laisse donc la courbe  $\Gamma$  invariante.

**Q 22.** Soit  $t \in [0, \pi]$ . Alors

$$x(t) = \Re\left(\frac{2e^{it} + e^{-2it}}{3}\right) = \frac{2\cos t + \cos(-2t)}{3} = \frac{2\cos t + 2\cos^2 t - 1}{3},$$

$$y(t) = \Im\left(\frac{2e^{it} + e^{-2it}}{3}\right) = \frac{2\sin t + \sin(-2t)}{3} = \frac{2\sin t - 2\cos t \sin t}{3}.$$

$x$  et  $y$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  (car  $z$  l'est) et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

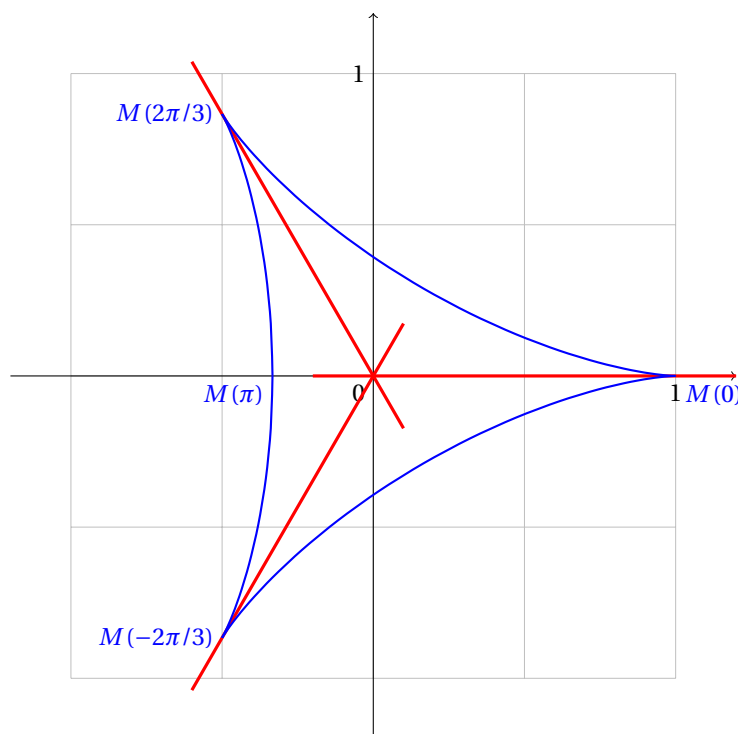
$$x'(t) = \frac{-2\sin t - 4\sin t \cos t}{3} = -\frac{4}{3}\sin t \left(\cos t + \frac{1}{2}\right),$$

$$y'(t) = \frac{2\cos t + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t}{3} = \frac{2}{3}(2 + 2\cos t - 4\cos^2 t) = -\frac{4}{3}(\cos t - 1) \left(\cos t + \frac{1}{2}\right).$$

En effet les racines du polynôme  $1 + X - 2X^2$  sont 1 et  $-\frac{1}{2}$ . On calcule enfin  $z(\pi) = -\frac{1}{3}$ , et on obtient alors le double tableau de variations suivant :

| $t$     | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$  |
|---------|---|------------------|--------|
| $x'(t)$ | 0 | −                | 0      |
| $x(t)$  | 1 | $-1/2$           | $-1/3$ |
| $y'(t)$ | 0 | +                | 0      |
| $y(t)$  | 0 | $\sqrt{3}/2$     | 0      |

Notons  $\Delta_t$  la tangente à  $\Gamma$  au point  $M(t)$ . On a admis que  $\Delta_0$  passe par  $O$ . D'après la question **Q20**,  $\Delta_{2\pi/3}$  est l'image de  $\Delta_0$  par  $\rho$ ; elle passe donc elle aussi par  $O$ . Ainsi  $\Delta_{2\pi/3}$  passe par les points  $O$  et  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . De même,  $\Delta_{-2\pi/3}$  passe par les points  $O$  et  $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ . D'où le tracé de  $\Gamma$  :



**Q 23.** D'après la question **Q20**, la longueur  $\ell$  de la courbe  $\Gamma$  est le triple de la longueur de l'arc entre  $M(0)$  et  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . Donc

$$\ell = 3 \int_0^{2\pi/3} |z'(t)| dt = 3 \int_0^{2\pi/3} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Soit  $t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ . Alors

$$\begin{aligned} |z'(t)|^2 &= \frac{4}{9} (\sin^2 t (1 + 2 \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2 (1 + 2 \cos t)^2) = \frac{4}{9} (1 + 2 \cos t)^2 (\sin^2 t + 1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \\ &= \frac{8}{9} (1 + 2 \cos t)^2 (1 - \cos t) = \frac{8}{9} (1 + 3 \cos t - 4 \cos^3 t). \end{aligned}$$

Or, en linéarisant  $\cos^3 t$ ,

$$\cos^3 t = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{8} = \frac{\cos(3t) + 3\cos t}{4}.$$

Donc

$$|z'(t)|^2 = \frac{8}{9} (1 - \cos 3t) = \frac{8}{9} \left( 1 - \left( 1 - 2\sin^2 \left( \frac{3t}{2} \right) \right) \right) = \frac{16}{9} \sin^2 \left( \frac{3t}{2} \right).$$

Or  $0 \leq \frac{3t}{2} \leq \pi$  donc  $\sin \left( \frac{3t}{2} \right) \geq 0$ , ainsi

$$\ell = 3 \times \frac{4}{3} \times \int_0^{2\pi/3} \left| \sin \left( \frac{3t}{2} \right) \right| dt = 4 \int_0^{2\pi/3} \sin \left( \frac{3t}{2} \right) dt = \left[ -\frac{8}{3} \cos \left( \frac{3t}{2} \right) \right]_0^{2\pi/3} = \frac{16}{3}.$$

### III Exponentielle de deux matrices

**Q 24.** Soit  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} u \in \ker(f - \text{Id}) &\iff f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = 2y \iff u \in \text{Vect}(2, 1), \\ u \in \ker(f - 2\text{Id}) &\iff f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = 3y \iff u \in \text{Vect}(3, 1). \end{aligned}$$

En notant  $u_1 = (2, 1)$  et  $u_2 = (3, 1)$ , on a donc montré que  $\ker(f - \text{Id}) = \text{Vect}(u_1)$  et  $\ker(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}(u_2)$  sont deux droites vectorielles. De plus, les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi  $\ker(f - \text{Id})$  et  $\ker(f - 2\text{Id})$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Q 25.** Notons  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$  et  $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2)$ . On sait que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}'}(q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, d'après la formule de changement de base,

$$Q_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad Q_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par la méthode du pivot, on calcule  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , d'où

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Q 26.**  $q_1$  et  $q_2$  sont des projecteurs, donc  $q_1^2 = q_1$  et  $q_2^2 = q_2$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $q_1(u) \in F_1$  donc  $q_2(q_1(u)) = 0$ . Ainsi  $q_2 \circ q_1 = 0$ . De même  $q_1 \circ q_2 = 0$ . De plus  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires, donc pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique  $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$  tel que  $u = x_1 + x_2$ . Or on sait que  $x_1 = q_1(u)$  et  $x_2 = q_2(u)$ . Donc  $u = q_1(u) + q_2(u)$ , donc  $q_1 + q_2 = \text{Id}$ . De toutes ces relations, on déduit bien que

$$Q_1^2 = Q_1, \quad Q_2^2 = Q_2, \quad Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0, \quad Q_1 + Q_2 = I_2.$$

Enfin

$$Q_1 + 2Q_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

**Q 27.** Montrons par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$ .

— Initialisation : Pour  $k = 0$ , d'après la question précédente, on a bien

$$Q_1 + 2^0 Q_2 = Q_1 + Q_2 = I_2 = A^0.$$

— Hérédité : Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$ . Alors, d'après les propriétés de la **Q26**,

$$A^{k+1} = AA^k = (Q_1 + 2Q_2)(Q_1 + 2^k Q_2) = Q_1^2 + 2Q_2 Q_1 + 2^k Q_1 Q_2 + 2^{k+1} Q_2^2 = Q_1 + 2^{k+1} Q_2.$$

La propriété est donc bien démontrée au rang  $k + 1$ .

On a donc montré par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$ .

**Q 28.** On rappelle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**Q 29.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'après **Q25** et **Q27**,

$$A^k = \begin{pmatrix} -2 + 6 \times 2^k & 6 - 6 \times 2^k \\ -1 + 2^k & 3 - 2 \times 2^k \end{pmatrix}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (-2 + 6 \times 2^k) & \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (6 - 6 \times 2^k) \\ \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (-1 + 2^k) & \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (3 - 2 \times 2^k) \end{pmatrix}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (-2 + 6 \times 2^k) = -2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2e^t + 6e^{2t}.$$

On effectue le calcul similaire pour les trois autres coordonnées, et donc, en revenant à la définition de convergence de matrice donnée dans l'énoncé,

$$E_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} -2e^t + 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix} = e^t Q_1 + e^{2t} Q_2.$$

Ainsi, la suite  $(E_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge bien vers  $E(t)$ .

**Q 30.** D'après les propriétés de la **Q26** et la définition de  $E$  :

— On a

$$E(0) = e^0 Q_1 + e^0 Q_2 = Q_1 + Q_2 = I_2.$$

— Soit  $s, t \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= (e^t Q_1 + e^{2t} Q_2)(e^s Q_1 + e^{2s} Q_2) = e^t e^s Q_1^2 + e^{2t} e^{2s} Q_2^2 + e^t e^{2s} Q_1 Q_2 + e^{2t} e^s Q_2 Q_1 \\ &= e^{t+s} Q_1 + e^{2(t+s)} Q_2 = E(t+s). \end{aligned}$$

— Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Chaque coordonnée de  $E(t)$  s'exprime comme une combinaison linéaire de  $e^t$  et  $e^{2t}$ , donc  $E$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $E'(t) = e^t Q_1 + 2e^{2t} Q_2$ . Alors

$$AE(t) = (Q_1 + 2Q_2)(e^t Q_1 + e^{2t} Q_2) = e^t Q_1^2 + 2e^{2t} Q_2^2 + e^{2t} Q_1 Q_2 + 2e^t Q_2 Q_1 = E'(t).$$

**Q 31.** La notation proposée est cohérente car, d'après la question précédente, la fonction  $E$  vérifie l'équation fonctionnelle et l'équation différentielle de l'exponentielle réelle vues en partie **I.A**. D'autre part, par abus de notation, on pourrait noter que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

ce qui reste cohérent avec la définition de l'exponentielle par sa série entière.

**Q 32.** En reconnaissant une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , on peut donc remarquer que  $g$  est la rotation vectorielle d'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Q 33.** D'après la question précédente, on a  $g^2 = -\text{Id}$  donc  $B^2 = -I_2$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} B^{2n} &= (-I_2)^n = (-1)^n I_2, \\ B^{2n+1} &= B^{2n} B = (-1)^n B. \end{aligned}$$

**Q 34.** Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{t^i}{i!} B^i = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons  $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ . Alors, d'après la **Q28**, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{2n+1} = R(t)$ . De plus,

$$R_{2n}(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} \frac{t^i}{i!} B^i = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1},$$

on montre donc de même que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{2n+1} = R(t)$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{2n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{2n+1}(t) = \cos t.$$

On en déduit que la suite  $(\alpha_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\cos t$ . De même, les suites  $(\beta_n(t)), (\gamma_n(t)), (\delta_n(t))$  convergent respectivement vers  $-\sin t, \sin t, \cos t$ . Donc  $(R_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $R(t)$ .

**Q 35.** La matrice  $R(t)$  est la matrice de la rotation vectorielle du plan d'angle  $t$ .

## IV Un système différentiel

**Q 36.**

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

On en déduit, d'après le théorème du rang, que  $\dim \ker(A - I_3) = 2$ . Donc 1 est valeur propre de  $A$  et l'espace propre associé est de dimension 2. (1 est donc une valeur propre d'ordre de multiplicité au moins égal à 1).

On vérifie sans aucune difficulté que  $Av_1 = v_1$  et  $Av_2 = v_2$ . De plus,  $v_1$  et  $v_2$  étant non nuls, ce sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, enfin, comme ces 2 vecteurs sont non colinéaires, ils forment une famille libre de deux vecteurs du sous espace vectoriel  $E_1 = \ker(A - I_3)$  qui est de dimension 2, en conclusion,  $(v_1, v_2)$  est une base de  $E_1$ .

**Q 37.** De la même façon,

$$\text{rg}(A + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

D'après le théorème du rang,  $\dim \ker(A + I_3) = 1$ . Donc  $-1$  est valeur propre de  $A$  et l'espace propre associé est de dimension 1.

On vérifie  $Av_3 = -v_3$ ,  $v_3$  étant non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-1$ , or  $E_{-1} = \ker(A + I_3)$  est de dimension 1, en conclusion,  $(v_3)$  est une base de  $E_{-1}$ .

**Q 38.**  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de vecteurs propres de  $A$  et c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ , on peut par exemple le justifier en étudiant :

$$\text{rg}(v_1, v_2, v_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

**Q 39.**  $A$  est, d'après ce qui précède, diagonalisable.

Dans la base de vecteurs propres  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $A$  est semblable à  $\text{diag}(1, 1, -1)$ .

On a donc,  $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$  où  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

On ne demande pas ici de déterminer  $P^{-1}$  et c'est inutile pour la suite.

**Q 40.** On considère le système différentiel  $X'(t) = AX(t)$  (IV.1).

On pose  $X(t) = PY(t)$  ce qui équivaut à  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ .

Par linéarité de la dérivation, on a  $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ .

donc :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \end{aligned}$$

Ce dernier système différentiel s'écrit :  $\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = -y_3 \end{cases}$  Les solutions sont :  $\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^t \\ y_2(t) = k_2 e^t \\ y_3(t) = k_3 e^{-t} \end{cases}$  où  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$  dépendent des conditions initiales.

Il reste alors à déterminer  $X(t) = PY(t)$  soit :  $\begin{cases} x_1(t) = -k_1 e^t + k_3 e^{-t} \\ x_2(t) = k_1 e^t + k_3 e^{-t} \\ x_3(t) = k_2 e^t - k_3 e^{-t} \end{cases}$

**Q 41.** On recherche enfin l'unique solution vérifiant la condition initiale  $X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On résout :

$$\begin{cases} -k_1 + k_3 = a \\ k_1 + k_3 = b \\ k_2 - k_3 = c \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = \frac{-a+b}{2} \\ k_3 = \frac{a+b}{2} \\ k_2 = c + \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

L'unique solution du problème est donc :  $X(t) = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2}e^t + \frac{a+b}{2}e^{-t} \\ \frac{-a+b}{2}e^t + \frac{a+b}{2}e^{-t} \\ \frac{a+b+2c}{2}e^t + \frac{a+b}{2}e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & -\text{sh}(t) & 0 \\ -\text{sh}(t) & \text{ch}(t) & 0 \\ \text{ch}(t) & \text{ch}(t) & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

L'application recherchée est donc :

$$M: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & -\text{sh}(t) & 0 \\ -\text{sh}(t) & \text{ch}(t) & 0 \\ -\text{ch}(t) & -\text{sh}(t) & e^t \end{pmatrix} \end{cases}$$