RAPPELS DE MÉCANIQUE DU POINT

I. Cinématique du point matériel

I.1. Référentiel. Repère.

Définition : Référentiel

Un référentiel est un **solide réel ou imaginaire** par rapport auquel on étudie le mouvement du système muni d'une **horloge**, afin de mesurer des durées. Le solide lié au référentiel est supposé fixe dans toute l'étude.

Exemple : Référentiels d'étude

- Le référentiel **terrestre** est lié au sol. Un homme endormi dans son lit est immobile dans ce référentiel.
- Le référentiel **géocentrique** est lié à une Terre fictive qui ne tournerait pas sur elle-même. Un homme endormi dans son lit a un mouvement de rotation dans ce référentiel.
- Le référentiel **héliocentrique** est lié à un Soleil fictif qui ne tournerait pas sur lui-même. Le centre de gravité de la Terre est quasiment en rotation dans ce référentiel.

Définition : Repère

Un repère est l'association d'un point de l'espace et d'une base de projection.

Définition : Base de projection

La base de projection est **un ensemble de 3 vecteurs** qui permettent de décrire tous les vecteurs de l'espace.

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ est une base } \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{V} \in \mathbb{R}^3, \exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{V} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2} + \gamma \overrightarrow{e_3}$$

Définition : Base orthonormée directe

Les vecteurs de la base de projection sont très souvent choisis orthogonaux, de norme 1 et formant un trièdre direct (règle de la main droite) : on a une **base orthonormée directe**.

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ est une base orthonormée } \Leftrightarrow \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Remarque : Projection

Si l'on utilise la base orthonormée $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$, les composantes de chaque vecteur sont $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ avec $a_i = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_i}$.

I.2. Notion de point matériel.

Définition : Point matériel

Un point matériel est un point géométrique muni d'une masse.

On assimile fréquemment les systèmes solides à un point matériel situé en son centre de gravité. Ce faisant, on néglige cependant le mouvement de rotation du solide sur lui-même.

Important : Résultats de mécanique du point

Les résultats de ce chapitre sont applicables à tout point matériel, et se généralisent aux solides en translation de taille faible devant la taille de leur trajectoire.

I.3. Vecteur position, vitesse, et accélération dans différentes bases.

I.3.a. Définitions

Définition : Vecteur position

Le vecteur position d'un point M est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ où O est un point fixe quelconque dans le référentiel d'étude.

Définition : Vecteur-vitesse

Le vecteur-vitesse du point mobile M dans son mouvement relativement au référentiel $\mathscr{R}$, est la dérivée dans $\mathscr{R}$ de son vecteur position dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{v}(M)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} \quad \text{avec O un point fixe dans } \mathscr{R}$$

La dimension de la norme de la vitesse et de ses composantes est $\mathrm{L.T^{-1}}$.

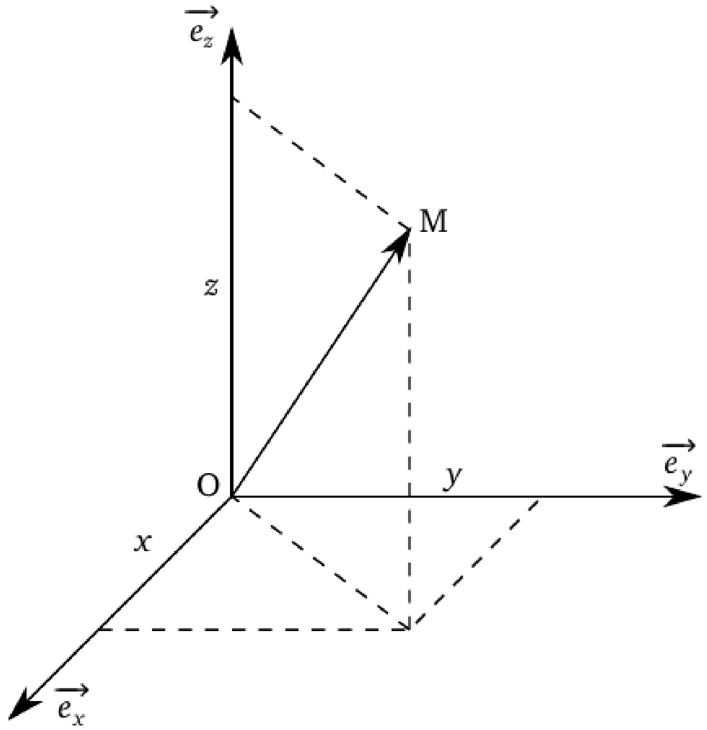
Définition : Vecteur-accélération

Le vecteur-accélération du point mobile M dans son mouvement relativement au référentiel $\mathscr{R}$, est la dérivée dans $\mathscr{R}$ de son vecteur vitesse dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{a}(M)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M)_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}$$

La norme et les composantes de l'accélération ont pour dimension $\mathrm{LT^{-2}}$.

I.3.b. Base et coordonnées cartésiennes



Base cartésienne : $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ sont fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.

Vecteur position ♦♦♦

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

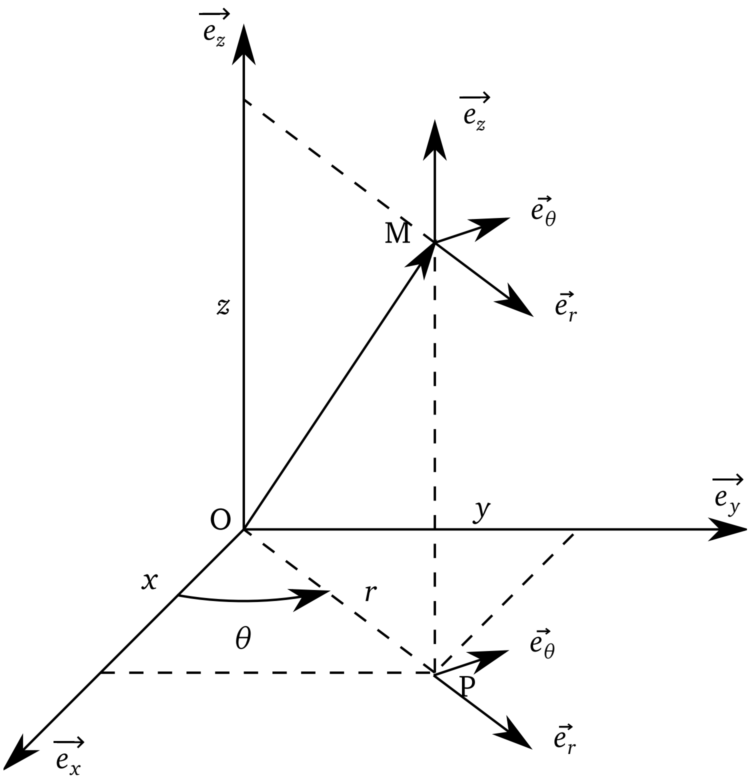
Vecteur vitesse ♦♦♦

$$\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$$

Vecteur accélération ♦♦♦

$$\overrightarrow{a_{\mathscr{R}}} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_y} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z}$$

I.3.c. Base et coordonnées cylindriques



Base cylindrique : $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_z}$ est le seul vecteur fixe de la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.

Vecteur position ♦♦♦

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

Dérivée des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ♦♦♦

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}$$

En utilisant ce résultat on peut trouver les vecteurs vitesses et accélérations par dérivées successives du vecteur position.

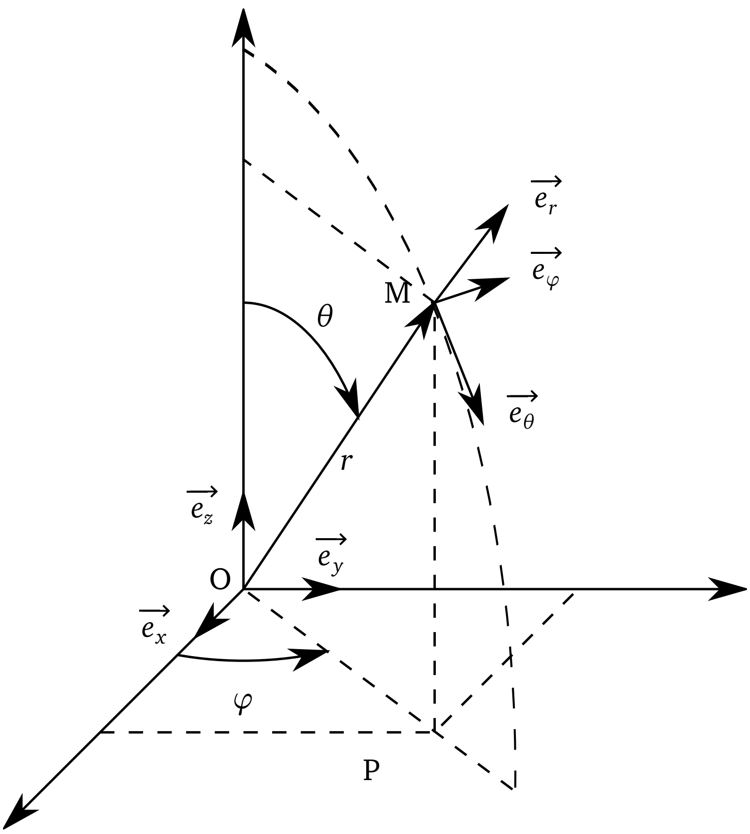
Vecteur vitesse ♦♦♦

$$\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$$

Vecteur accélération ♦♦♦

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\mathscr{R}}} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\overrightarrow{e_r} \\ &+ \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

I.3.d. Base et coordonnées sphériques



Base sphérique : $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$

Aucun des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ n'est fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.

Vecteur position	♦♦♦

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

Vecteur vitesse	♦♦♦

$$\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\varphi}$$

.

Exercice d'application 1 :

On étudie le mouvement d'un cheval de bois d'un manège assimilé à un point matériel M à la surface du manège dans le référentiel terrestre. La distance entre l'axe de rotation du manège et le cheval est notée R et est constante, la vitesse angulaire de rotation du manège par rapport au sol est constante : ω (en rad.s^{-1}).

1. Décrire le mouvement (circulaire, rectiligne, uniforme, ...) du cheval dans le référentiel terrestre.
2. On appelle O le point de l'axe du manège à la même altitude que le cheval. Construire sur un schéma la base cylindrique adaptée au problème. On notera θ la coordonnée angulaire du point M.
3. Exprimer le vecteur position du cheval dans cette base cylindrique.
4. En déduire, en dérivant successivement et en simplifiant au maximum les expressions, les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le référentiel terrestre et dans cette base.
5. Représenter la trajectoire vu du dessus dans le référentiel terrestre, puis, en deux points de la trajectoire, représenter le vecteur vitesse et accélération.

II. Dynamique newtonienne

II.1. Lois de Newton

II.1.a. 1ère loi : Principe d'inertie

Définition : Système isolé et pseudo-isolé

Un système est dit isolé mécaniquement si aucune action ne s'exerce sur le système.

Il est dit **pseudo-isolé** si la résultante de toutes les actions extérieures s'exerçant sur le système est nulle.

Important : Principe d'inertie

Il existe des référentiels, dits galiléens, dans lesquels le mouvement d'un système isolé (ou pseudo-isolé) est rectiligne uniforme.

Si $\mathscr{R}$ est galiléen, et G est le centre de gravité d'un système isolé, $\overrightarrow{a}(G)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{0}$

Remarque : Référentiel terrestre galiléen

Si la durée de l'expérience est très faible devant la durée d'un jour, on peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen.

Le référentiel terrestre est alors quasiment en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique.

II.1.b. 2nde loi : Principe fondamental de la dynamique

Définition : Quantité de mouvement

Pour un point matériel M de masse m et animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, on définit sa quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ dans ce même référentiel $\mathscr{R}$ par

$$\overrightarrow{p}(M)_{\mathscr{R}} = m\overrightarrow{v}(M)_{\mathscr{R}}$$

Remarque : Quantité de mouvement d'un solide

Pour un solide Σ de masse M et de centre de gravité G, sa quantité de mouvement dans $\mathscr{R}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{p}(\Sigma)_{\mathscr{R}} = M\overrightarrow{v}(G)_{\mathscr{R}}$$

Important : Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, pour un système de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_{\mathscr{R}}$ soumis à un jeu de forces extérieures $\overrightarrow{F_{\text{ext,i}}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext,i}}}$$

Si la masse du système est conservée (si le système est fermé), le PFD peut s'écrire : $m\overrightarrow{a}(G)_{\mathscr{R}} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext,i}}}$

Important : Système à l'équilibre mécanique

Un système est dit à l'équilibre mécanique si sa vitesse et son accélération est nulle.
$\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$ est une condition nécessaire mais non suffisante d'équilibre mécanique. Il faut en plus que la vitesse soit nulle.

II.1.c. 3eme loi : Principe des actions réciproques

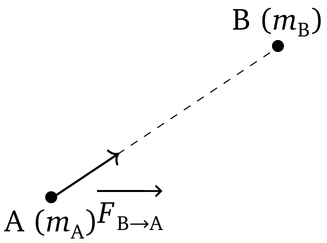
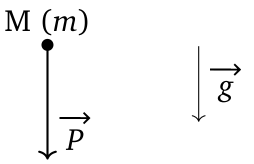
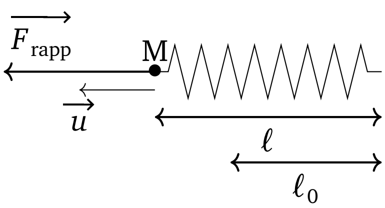
Important : Principe des actions réciproques

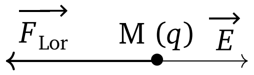
Soient deux systèmes A et B en interaction. La force modélisant l'action de A sur B et celle modélisant l'action de B sur A sont de même norme et direction mais de sens opposé.

$$\overrightarrow{F_{\text{A}\to\text{B}}} = -\overrightarrow{F_{\text{B}\to\text{A}}}$$

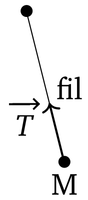
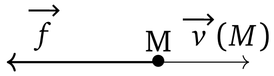
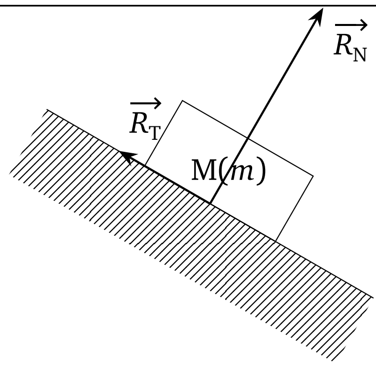
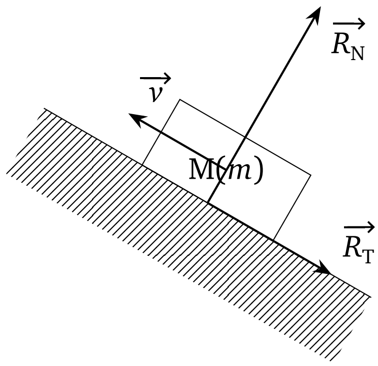
II.2. Inventaire des forces usuelles

II.2.a. Forces conservatives

Interaction	Schéma	Vecteur force, point d'application
Force entre deux points massifs		$\overrightarrow{F_{\text{B}\to\text{A}}} = \mathscr{G}\frac{m_\text{A}m_\text{B}}{\text{AB}^3}\overrightarrow{\text{AB}}$ Exercé par : le point B Point d'application : au centre de gravité de A.
Poids exercé par la Terre		$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}(M)$ où $\overrightarrow{g}(M)$ est le champ de pesanteur au point M. Exercé par : la Terre Point d'application : au centre de gravité de M.
Action d'un matériau élastique (ressort) : loi de Hooke	Exemple où $\ell > \ell_0$: 	$\overrightarrow{F_{\text{rapp}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dirigé dans le sens où un déplacement de M allonge le ressort, k la raideur du ressort et ℓ_0 la longueur à vide du ressort. Exercé par : le ressort Point d'application : au point de contact entre le système étudié et le ressort

Action d'un champ électrique sur une charge ponctuelle (force de Lorentz électrique)	Cas où $q < 0$: 	$$\overrightarrow{F}_{\text{Lor}} = q\,\overrightarrow{E}(M)$$ où $\overrightarrow{E}(M)$ est le vecteur champ électrique au niveau du point M. Exercé par : la source du champ $\overrightarrow{E}$ Point d'application : au centre de la charge

II.2.b. Forces non conservatives

Tension d'un fil		$$\overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{u}$$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dirigé du système vers le fil. $T > 0$ si le fil est tendu. Exercé par : le fil Point d'application : au contact entre le fil et le système
Frottement fluide		Viscosité forte et/ou vitesse faible : $$\overrightarrow{f} = -\lambda\,\overrightarrow{v}(M)$$ Viscosité faible et/ou vitesse forte : $$\overrightarrow{f} = -\alpha\left\Vert\overrightarrow{v}(M)\right\Vert\overrightarrow{v}(M)$$ où $\overrightarrow{v}(M)$ est la vitesse de M par rapport au fluide. Exercé par : le fluide Point d'application : dépend de la surface et de l'écoulement du fluide
Frottements solides : modèle d'Amontons-Coulomb	 Le mobile ne glisse pas  Le mobile glisse vers le haut	S'il y a adhérence $$\left\Vert\overrightarrow{R}_{\text{T}}\right\Vert < \mu_{\text{s}}\left\Vert\overrightarrow{R}_{\text{N}}\right\Vert$$ S'il y a glissement $$\left\Vert\overrightarrow{R}_{\text{T}}\right\Vert = \mu_{\text{d}}\left\Vert\overrightarrow{R}_{\text{N}}\right\Vert$$ et $\overrightarrow{R}_{\text{T}}$ est de sens opposé à la vitesse $\overrightarrow{v}$ de glissement. μ_{s} et μ_{d}, coeff. de frottement statique dépendent uniquement des matériaux en jeu. Exercées par : le support Point d'application : au centre de la surface de contact.

Exercice d'application 2 : Ressort vertical

On considère le système constitué d'une masse ponctuelle m accrochée à un ressort idéal vertical, l'autre extrémité étant fixe dans le référentiel terrestre. La masse se déplace dans une éprouvette contenant d'eau, mais on négligera les effets de la poussée d'Archimède, le volume de la masse étant faible. On notera k la raideur du ressort et l_0 sa longueur à vide. On notera λ le coefficient de frottement fluide de l'eau sur le ressort, modélisé par une force de frottement visqueux ($\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$)

1. Faites un schéma modélisant le système et le paramétrer. On choisira un axe vertical descendant $(O, \overrightarrow{e_z})$ dont l'origine est prise au niveau de l'extrémité fixe du ressort. La position de la masse sera repérée par la coordonnée z qui correspond donc à la longueur du ressort.
2. Exprimer le vecteur position, vitesse puis accélération du système sachant que la masse est supposée contrainte à rester sur un axe vertical.
3. Faites l'inventaire des forces s'exerçant sur la masse.
4. On suppose que le système est à l'équilibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique trouver l'expression en fonction de l'accélération de pesanteur g, k et m de la longueur d'équilibre z_{eq}.
5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, cette fois-ci hors équilibre, déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur. Commenter.
6. Que retrouve-t-on en absence de frottement ?

Exercice d'application 3 : Un lance pierre

On souhaite lancer une pierre le plus loin possible avec un lance pierre. On modélise la pierre par un point matériel M de masse m en son centre de gravité. La pierre est lancée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale depuis une altitude z_0.

On négligera l'action de l'air et on supposera le sol horizontal.

1. Choisir une base de projection et un jeu de coordonnées adapté au suivi du mouvement de la pierre dans le référentiel terrestre, puis exprimer l'accélération du centre de gravité du système dans cette base.
2. Faire un bilan des forces extérieures s'appliquant au système et appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique.
3. Projeter le P.F.D. dans la base choisie, et en déduire les lois horaires du mouvement et l'équation de la trajectoire
4. À quelle distance au sol du point de départ la pierre touchera-t-elle le sol ?

Exercice d'application 4 : Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un fil parfait de longueur ℓ et d'une masse ponctuelle m. On néglige les frottements et on lâche sans vitesse initiale le pendule depuis un angle θ_0 par rapport à la verticale. Ce fil ne peut tourner que dans un plan orthogonal à l'axe horizontal sur lequel est fixé le pendule.

1. Représenter une base cylindrique où le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ est dirigé selon l'axe du pendule. On prendra θ la coordonnée de la masse, de façon à ce que quand θ croît on tourne dans le sens direct autour de $\overrightarrow{e_z}$.
2. Donner l'expression du vecteur vitesse puis accélération en fonction des vecteurs de la base, de ℓ, de θ ou de ses dérivées.
3. Faire un bilan des forces et les représenter sur votre schéma. Projeter ces forces dans la base cylindrique.
4. Obtenir une équation différentielle portant sur $\theta(t)$. Que devient-elle dans l'approximation des petits angles ?
5. La résoudre dans le cadre de cette approximation. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.
6. En déduire l'expression de la norme de la tension du fil au cours du temps, toujours dans le cadre de l'approximation des petits angles.

III. Énergétique du point matériel

III.1. Travail et puissance reçue via une force

Définition : Puissance

Un système extérieur exerçant une force $\overrightarrow{f}$ en un point A du système étudié communique à ce dernier une puissance $\mathscr{P}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ définie par :

$$\boxed{\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}(\mathrm{A})_{\mathscr{R}}}$$

où $\overrightarrow{v}(\mathrm{A})_{\mathscr{R}}$ est la vitesse du point matériel A du système sur lequel s'applique cette force dans le référentiel $\mathscr{R}$.

Remarque : Cas d'un point matériel

Si le système est un point matériel M, alors nécessairement, le point d'application des forces est en M et $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}(\mathrm{M})_{\mathscr{R}}$

Définition : Travail élementaire

Pendant dt une force $\overrightarrow{f}$ communique au système un travail élémentaire noté

$$\boxed{\delta W = \mathscr{P}\,\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t$$

III.2. Définition de l'énergie cinétique

Définition : Energie cinétique d'un système ponctuel

Soit un système ponctuel de masse m. L'énergie cinétique du point M dans $\mathscr{R}$ est donnée par :

$$\boxed{E_{c\mathscr{R}} = \frac{1}{2} m v^2(\mathrm{M})_{\mathscr{R}}} \quad \text{exprimée en joules.}$$

où $v(\mathrm{M})_{\mathscr{R}}$ est la vitesse de M dans $\mathscr{R}$.

III.3. Théorèmes de l'énergie cinétique

Important : Théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un système fermé :

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c}2} - E_{\mathrm{c}1} = \sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f_{\mathrm{ext}}}) + \sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f_{\mathrm{int}}})$$

où $E_{\mathrm{c}i}$ est l'énergie cinétique du système dans $\mathcal{R}$ à l'événement i.

Si le système est indéformable : $\sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f_{\mathrm{int}}}) = 0$

Remarque : Pour une transformation infinitésimale

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un système fermé :

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{c}} = \sum \delta W(\overrightarrow{f_{\mathrm{ext}}}) + \sum \delta W(\overrightarrow{f_{\mathrm{int}}})$$

C'est un cas particulier du premier principe où l'énergie interne reste constante et où il n'y a pas de transfert thermique

III.4. Énergies potentielles

III.4.a. Définitions

Définition : Énergie potentielle

$\overrightarrow{f_{\mathrm{c}}}$ est **conservative** si et seulement si il existe une **fonction** scalaire $E_{\mathrm{p}}(M)$, qui à tout jeu de coordonnée associe une énergie appellée **énergie potentielle**, qui ne dépend **que des coordonnées du point d'application M** dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude. On parle alors de **champ d'énergie potentielle**.

Cette fonction est telle que le travail de la force conservative $\overrightarrow{f}_{\mathrm{c}}$ pour passer d'un point A à un point B est égale à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}_{\mathrm{c}}) = E_{\mathrm{p}}(A) - E_{\mathrm{p}}(B) = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

L'énergie potentielle s'exprime en Joule.

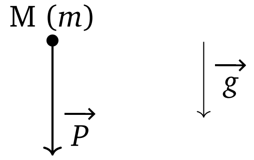
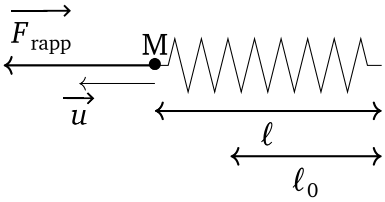
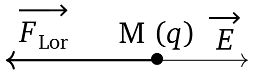
Attention ceci n'est pas vrai dans le cas de forces non conservatives : on ne peut pas trouver de telle fonction.

Important : Transformation infinitésimale

Lors d'une transformation infinitésimale, on peut écrire que le travail élémentaire reçu d'une force conservative est l'opposé de la variation d'énergie potentielle correspondante du système :

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{f}_{\mathrm{c}}) = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}$$

III.4.b. Expressions

Interaction	Schéma	Énergie potentielle
Poids exercé par la Terre		**Énergie potentielle de pesanteur** : Soit z l'altitude (croissante quand on s'éloigne de la Terre) par rapport à une altitude de référence : $$E_{\text{p}} = mgz$$
Action d'un matériau élastique (ressort) : loi de Hooke	Exemple où $\ell > \ell_0$: 	**Énergie potentielle élastique** : $$E_{\text{p}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$ avec k la raideur du ressort.
Action d'un champ électrique sur une charge ponctuelle (force de Lorentz électrique)	Cas où $q < 0$: 	**Énergie potentielle électrique** : $$E_{\text{p}} = qV(M)$$ avec V le potentiel électrique au niveau du point M.

III.5. Énergie mécanique

Définition : Energie mécanique

L'énergie mécanique d'un système dans $\mathscr{R}$ est

$$\boxed{E_{\text{m},\mathscr{R}} = E_{\text{c},\mathscr{R}} + \sum E_{\text{p}}}$$

Important : Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, la variation d'énergie mécanique d'un système fermé est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** (intérieures ou extérieures) s'exerçant sur/dans le système :

$$\boxed{\Delta E_{\text{m}} = E_{\text{m2}}(\text{M}) - E_{\text{m1}}(\text{M}) = \sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f_{\text{nc,int}}}) + \sum W_{1\to 2}(\overrightarrow{f_{\text{nc,ext}}})}$$

Remarque : Pour une transformation infinitésimale

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, pour un système fermé :

$$\text{d}E_{\text{m}} = \sum \delta W(\overrightarrow{f_{\text{nc,ext}}}) + \sum \delta W(\overrightarrow{f_{\text{nc,int}}})$$

C'est un cas particulier du premier principe où l'énergie interne reste constante et où il n'y a pas de transfert thermique.

III.6. Mouvement d'un système conservatif

Définition : Système conservatif

On dit que **le système est conservatif** si parmi lesforces qui s'exercent sur le système **les seules qui travaillent sont conservatives**.

Lorsque l'énergie potentielle d'un système ponctuel ou en translation **ne fait intervenir qu'une coordonnée**, on peut tracer un graphe d'énergie potentielle.

Important : Positions d'équilibres et stabilité

On peut montrer que si l'énergie potentielle est extrémale en un point alors ce point est une position d'équilibre possible du système. On distingue deux types de positions d'équilibre:

- Les positions d'équilibre **stables** telles que si on éloigne un peu le système de ces positions, il a tendance à y retourner. Ce sont des **minimum** d'énergie potentielle.
- Les positions d'équilibre **instables** telles que si on éloigne un peu le système de ces positions, il a tendance à s'en éloigner. Ce sont des **maximum** d'énergie potentielle.

Exercice d'application 5 : Lancé d'une bille de flipper

Dans tout cet exercice on néglige les frottements. On considère un ressort de flipper, de raideur $k = 40\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $L = 10\,\mathrm{cm}$, incliné d'un angle $\alpha = 6^\circ$ avec l'horizontale. Sur ce ressort repose une bille en métal de masse $m = 150\,\mathrm{g}$.

On comprime le ressort au maximum avant de le lâcher, ce qui propulsera la bille. On supposera que le contact entre le ressort et la bille est rompu si la bille est au delà de la longueur à vide du ressort.

On appellera O le point d'attache du ressort et $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens de l'allongement du ressort. La position de la bille sera donc repérée par son abscisse x le long de cet axe.

1. Réaliser un schéma paramétré puis exprimer les différentes énergies potentielles en fonction de x et des données de l'énoncé. Pour l'énergie potentielle élastique, on précisera le domaine de variation de x pour lequel cette écriture est valable.

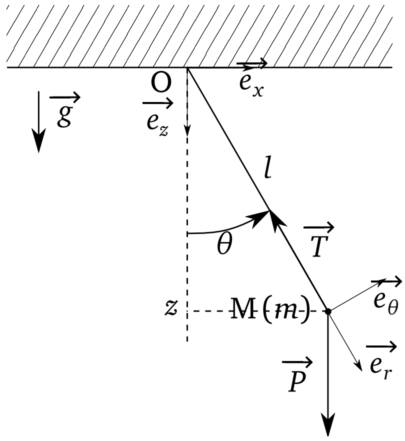
   On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point le plus bas accessible par la bille et celle de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort est à sa longueur à vide.

2. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v de la bille au moment au celle-ci quitte le ressort.

3. Déterminer la distance maximale $x_{\max}$ à laquelle pourra s'éloigner la bille. On donnera une expression littérale en fonction uniquement de g, α, m, k et L avant de procéder à une application numérique.

Exercice d'application 6 : Trajectoire et équilibre du pendule simple

On considère un pendule simple de masse m et de longueur l. La masse est reliée au bâti par une tige rigide de masse négligeable. On étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, après l'avoir lâché à $t = 0$ d'une position θ_0 avec une vitesse nulle.



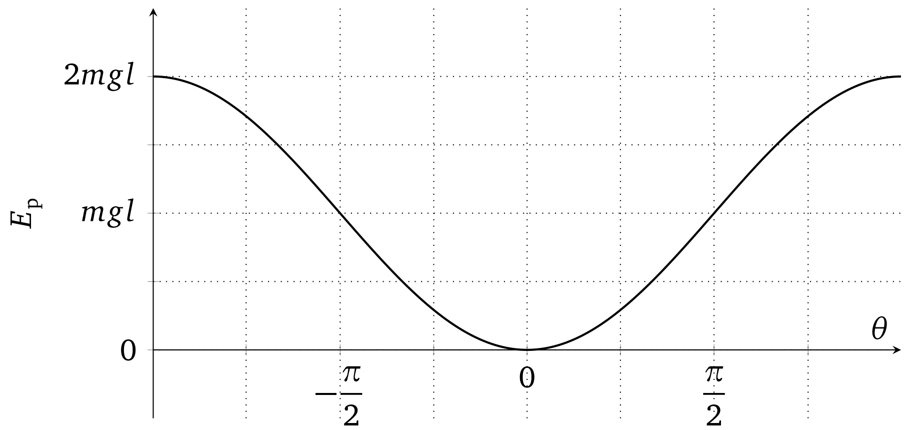
1. Faire un bilan des forces et donner les expressions des énergies potentielles en coordonnées cylindriques. On choisira les constantes de façon à ce que les énergies potentielles soient nulles pour $\theta = 0$. On prendra l'angle θ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

2. Exprimer alors l'énergie mécanique du pendule en fonction des paramètres et de la coordonnées θ et de ses dérivées.

3. Montrer que l'énergie mécanique du pendule simple est conservée et donner son expression en se servant des conditions initiales.

4. En dérivant cette expression par rapport au temps, déterminer l'équation du mouvement.

On a représenté sur la figure ci-dessous l'énergie potentielle de pesanteur du pendule simple en fonction de l'angle θ (cette courbe est périodique, de période 2π)



5. Déterminer les positions d'équilibre du système et trouver quelles sont leurs stabilités.

6. Tracer sur le graphique les trois courbes d'énergies mécaniques pour les angles initiaux $\theta_{01} = 0$, $\theta_{02} = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_{03} = \pi$. En déduire dans quel intervalle θ peut varier dans ces trois cas. Décrire le mouvement; est-il périodique?

7. Que se passe-t-il si l'énergie mécanique initiale est supérieure à $2mgl$?