ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME 1
Suites et calcul matriciel

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geq 0,\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Partie I - Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Q1. Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A a pour expression : $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$. En déduire les valeurs propres de A.

Q2. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.

Q3. La matrice A est-elle inversible ?

Q4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

Partie II - Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$.

Q5. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q6. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q7. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.
Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q8. Déterminer une relation entre A, P, T, P^{-1}.

Partie III - Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

Q9. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

Q10. Que vaut N^n pour un entier $n \geq 2$?

Q11. Déduire de ce qui précède une expression de T^n. On donnera chacun de ses coefficients.

Q12. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

Q13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

Q14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. Démontrer cette relation par récurrence.

Q15. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n.

PROBLÈME 2
Une fonction définie à partir d'une intégrale

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc.
On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I - Définition de la fonction

Q16. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

Q17. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+, de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

Q18. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \, .$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie II - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q19. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour $t \in [0, 1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \, .$$

Q20. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - (-t)^n = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \, .$$

Q21. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} \, .$$

On pourra remarquer que, pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1} (-t)^{n-1}$.

Q22. Écrire une fonction **python** d'en-tête `def fEntier(n):` qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On supposera la fonction `log` (pour $\ln$) importée de la bibliothèque **numpy**.

Partie III - Variations de f

Q23. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q24. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leq \beta$. Comparer, pour $t \in]0, 1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Q25. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1} \ .$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \ .$$

Q26. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

Q27. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

Q28. Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x} \ .$$

Q29. En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) \ .$$

Q30. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

PROBLÈME 3
Étude d'un couple de variables aléatoires

Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.
On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $1 - p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n-ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard.
On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit).
Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N.

Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries entières d'une variable réelle.

Q31. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$.

Q32. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente.

Q33. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

Partie II - Loi et espérance de X

Q34. Rappeler la loi de X. On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X = n)$.

Q35. Justifier l'existence de l'espérance de X, notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

Partie III - Loi de N

Q36. Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.

Q37. Donner, pour $n \in X(\Omega)$ et $k \in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N = k)$. On distinguera les cas $1 \leq k \leq n$ et $k > n$.

Q38. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} .$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

Q39. Calculer la valeur de $P(N = 1)$.

Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q40. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2.

On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où X et N sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

Q41. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

Q42. Que vaut $P([X = 1] \cap [N = 2])$?
Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Partie V - Espérance de N

Q43. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) \leq (1 - p)^{k-1}$.
On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq k$:

$$\frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} \leq p(1 - p)^{n-1} .$$

Q44. En déduire que N admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n}\, p(1 - p)^{n-1} .$$

Q45. On admet que le calcul de cette espérance peut être effectué en intervertissant l'ordre de sommation ; et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\, p(1 - p)^{n-1} .$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right) .$$

Q46. Montrer que $E(N) \leq E(X)$.
Ce résultat était-il prévisible ?

FIN