

**Notations et rappels**

Lorsque  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels non nuls,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients réels et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $M^\top$  sa transposée.

On identifie un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et une matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\text{Vect}((u_i)_{i \in I})$  le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est défini par l'égalité  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ , pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

Si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\chi_M$  son polynôme caractéristique et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  orienté par sa base canonique, on note  $u \wedge v$  le produit vectoriel des deux vecteurs  $u$  et  $v$ .

**Objectif du problème et articulations entre ses différentes parties**

Ce problème étudie les trajectoires de certaines équations différentielles et de certains systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

La partie I, consacrée à l'étude d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, est indépendante des parties II et III. Dans les parties II et III, on étudie des trajectoires des solutions  $t \mapsto X(t)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

selon les propriétés de la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et de la condition initiale  $X_0$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**I Une équation différentielle linéaire du second ordre**

On étudie dans cette partie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x''(t) + kx(t) = 0 \tag{I.1}$$

où  $x$  est une fonction inconnue deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $t$  une variable réelle et  $k$  un paramètre réel non nul.

On appelle *trajectoire* d'une solution  $x$  de (I.1) l'arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) = (x(t), x'(t)) \end{cases}$$

où le point  $M(t)$  a pour abscisse  $x = x(t)$  et pour ordonnée  $y = x'(t)$ .

On dit qu'une trajectoire est bornée si ses deux fonctions coordonnées sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**I.A – Conservation de l'énergie**

Si  $x$  est une solution de (I.1), on appelle énergie la fonction  $E$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = \frac{1}{2} (kx(t)^2 + x'(t)^2).$$

**Q 1.** Justifier que la fonction  $E$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

On note  $h = E(0)$ .

**Q 2.** En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le point  $M(t)$  appartient à la courbe d'équation cartésienne

$$kx^2 + y^2 = 2h.$$

### **I.B – Cas où $k$ est strictement positif**

Dans cette sous-partie, on suppose que  $k$  est un nombre réel strictement positif et on note  $\omega$  la racine carrée positive de  $k$ . L'équation (I.1) s'écrit donc  $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ .

**Q 3.** Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales  $(x(0), x'(0)) = (a, b)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels fixés.

**Q 4.** Démontrer qu'il existe un angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $x(0) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \cos \theta$  et  $x'(0) = \sqrt{2h} \sin \theta$ .

**Q 5.** Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \cos(\omega t - \theta)$  et vérifier que les trajectoires sont bornées.

**Q 6.** Déterminer les solutions dont l'énergie est nulle.

### **I.C – Cas où $k$ est strictement négatif**

Dans cette sous-partie, on suppose que  $k$  est un nombre réel strictement négatif et on note  $\omega$  la racine carrée positive de  $-k$ .

**Q 7.** L'équation (I.1) s'écrit donc  $x''(t) - \omega^2 x(t) = 0$ . Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales  $(x(0), x'(0)) = (a, b)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels fixés.

**Q 8.** Déterminer toutes les solutions d'énergie nulle et déterminer la nature géométrique de leurs trajectoires.

**Q 9.** Démontrer que la seule trajectoire bornée correspond à la solution identiquement nulle.

## **II Étude des trajectoires de systèmes linéaires**

### **II.A – Exemple d'un frottement visqueux en dimension 2**

On considère l'équation différentielle

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0 \tag{II.1}$$

où  $\alpha$  et  $\omega$  sont des réels tels que  $\alpha > \omega > 0$ .

Si  $x$  est une solution de (II.1), on lui associe la fonction vectorielle

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On appelle désormais *trajectoire* de  $x$  (ou de  $X$ ) l'arc paramétré  $t \mapsto X(t)$ .

On dit que la trajectoire de  $x$  est *bornée* si et seulement s'il existe  $M \geq 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|X(t)\| \leq M$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , ce qui revient à dire que les deux coordonnées de  $X$  sont des fonctions bornées.

**Q 10.** Justifier que cette équation différentielle est équivalente au système différentiel

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

**Q 11.** Préciser si la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et donner le cas échéant une base de vecteurs propres.

**Q 12.** Donner la dimension de l'espace vectoriel formé par les solutions du système différentiel  $X' = AX$ , où la fonction inconnue  $X$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , et déterminer une base de cet espace. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (II.1) sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ . Sont-elles bornées sur  $\mathbb{R}$  ?

### **II.B – Résultats préliminaires sur le comportement des trajectoires**

Dans cette sous-partie,  $n$  est un entier naturel non nul et  $A$  est une matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $w_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $A$ . On rappelle qu'il est défini en posant, pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $w_A(Y) = AY$ . On appelle noyau de  $A$  le noyau de l'endomorphisme  $w_A$ .

On suppose enfin que  $X$  est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où  $X_0$  est un vecteur dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est stable par une matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (respectivement par un endomorphisme  $w$ ) si pour tout  $Y \in F$ , on a  $AY \in F$  (respectivement  $w(Y) \in F$ ).

On admet que, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  stable par  $w_A$  et si  $X_0 \in F$ , alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) \in F$ .

**II.B.1)** On suppose, dans les deux questions qui suivent, que  $X_0$  est un vecteur propre de  $A$  pour une valeur propre réelle  $\lambda$ .

**Q 13.** Démontrer que, pour tout nombre réel  $t$ , il existe un nombre réel  $a(t)$  tel que  $X(t) = a(t)X_0$ .

On admet que la fonction  $a$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Q 14.** En déduire une expression de  $X(t)$  en fonction de  $X_0$ ,  $\lambda$  et  $t$ .

**Q 15.** En déduire que, si la trajectoire de  $X$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , quelle que soit la condition initiale  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors 0 est la seule valeur propre réelle possible de  $A$ .

Dans toute la suite du problème, on admet le résultat suivant :

**Proposition 1**

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et si la trajectoire de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est bornée sur  $\mathbb{R}$ , quelle que soit la condition initiale  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors toutes les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  ont une partie réelle égale à 0.

**II.B.2)** Dans cette section, on suppose que  $X_0$  appartient à  $\ker(A^2)$  mais n'appartient pas à  $\ker A$ .

**Q 16.** Démontrer que la famille  $(X_0, AX_0)$  est libre.

On admet que le plan  $\text{Vect}(X_0, AX_0)$  est stable par l'endomorphisme  $w$  canoniquement associé à  $A$  et qu'il existe deux fonctions  $a$  et  $b$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$ .

**Q 17.** Déterminer les fonctions  $a$  et  $b$ . En déduire la nature géométrique de la trajectoire de  $X$ . Est-elle bornée sur  $\mathbb{R}$  ?

### II.C – Étude de certaines trajectoires pseudo-périodiques

On suppose dans toute cette sous-partie II.C que  $\mu$  est un nombre réel strictement positif, que  $\varphi$  est un nombre réel n'appartenant pas à  $\pi\mathbb{Z}$  et que  $X_0$  est un élément non nul de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  vérifiant

$$(A^2 - 2\mu \cos \varphi A + \mu^2 I_n)X_0 = 0.$$

On note toujours  $X$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

**Q 18.** Justifier que l'équation  $x^2 - 2x\mu \cos \varphi + \mu^2 = 0$ , d'inconnue  $x$ , n'admet pas de racine réelle.

**Q 19.** En déduire que la famille  $(X_0, AX_0)$  est libre.

Comme dans la question 17, on admet que le plan  $\text{Vect}(X_0, AX_0)$  est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et qu'il existe deux fonctions  $a$  et  $b$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$ .

**Q 20.** Démontrer que les fonctions  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  et que

$$\begin{cases} a(0) = 1, \\ a'(0) = 0, \\ a''(t) - 2a'(t)\mu \cos \varphi + \mu^2 a(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Q 21.** En déduire une expression de  $a(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On admet que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $b(t) = \frac{e^{\mu t \cos \varphi}}{\mu \sin \varphi} \sin(\mu t \sin \varphi)$ .

**Q 22.** Montrer que la fonction  $X$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\cos \varphi = 0$ .

On suppose à présent que  $\cos \varphi = 0$ .

**Q 23.** Justifier que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $b(t) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu t)$ .

**Q 24.** Calculer  $\|X(t)\|^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Q 25.** En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d}{dt}(\|X(t)\|^2) = 2 \cos(2\mu t) \langle X_0, AX_0 \rangle + \frac{1}{\mu} \sin(2\mu t) (\|AX_0\|^2 - \mu^2 \|X_0\|^2).$$

**Q 26.** Montrer que la trajectoire de  $X$  est contenue dans un cercle de centre  $(0,0)$  si et seulement si  $\langle X_0, AX_0 \rangle = 0$  et  $\|AX_0\| = \mu \|X_0\|$ .

On a montré en particulier le résultat suivant qu'on pourra utiliser dans la suite du problème :

— **Proposition 2** —

Si  $X$  est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

et si  $X_0$  appartient au noyau d'une matrice de la forme  $A^2 + \mu^2 I_n$ , avec  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ , alors la trajectoire de  $X$  est dans le plan  $\text{Vect}(X_0, AX_0)$ . Cette trajectoire est tracée dans un cercle du plan  $\text{Vect}(X_0, AX_0)$  si et seulement si  $\langle X_0, AX_0 \rangle = 0$  et  $\|AX_0\| = \mu \|X_0\|$ .

### III Étude des trajectoires sphériques

#### III.A – Cas des matrices antisymétriques

##### III.A.1)

**Q 27.** Démontrer que, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et tout couple  $(X, Y)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ ,

$$X^\top AY = Y^\top A^\top X.$$

On dit qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *antisymétrique* si  $A^\top = -A$ .

**Q 28.** Démontrer que si la matrice  $A$  est antisymétrique alors, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X^\top AX = 0.$$

##### III.A.2)

Réciproquement, on suppose que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^\top AX = 0$ .

**Q 29.** Démontrer que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = -A^\top X$ .

On pourra calculer de deux manières différentes  $(X + Y)^\top A(X + Y)$ .

**Q 30.** En déduire que la matrice  $A$  est antisymétrique.

##### III.A.3)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  du système différentiel  $X'(t) = AX(t)$ . On dit que la trajectoire de  $X$  est *sphérique* s'il existe  $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $r \geq 0$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|X(t) - Z\| = r$ .

**Q 31.** On suppose que  $A$  est une matrice antisymétrique. Étudier la fonction  $t \mapsto \|X(t)\|^2$  et en déduire que la trajectoire de  $X$  est sphérique.

#### III.B – Caractérisation du cas où les trajectoires sont sphériques en dimension 2

Dans cette sous-partie, on suppose que  $n = 2$  et on suppose que la matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est non nulle et que les trajectoires du système différentiel  $X' = AX$  sont sphériques, quelle que soit la condition initiale  $X_0$ .

**Q 32.** Justifier que 0 est la seule valeur propre réelle possible pour la matrice  $A$ .

On pourra utiliser le résultat de la question 15.

**Q 33.** On suppose que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ . Justifier que la matrice  $A$  est trigonalisable et que  $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ . En utilisant le résultat des questions 16 et 17, démontrer que  $\ker A = \ker A^2$  et aboutir à une contradiction.

**Q 34.** Justifier que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et qu'il existe un nombre réel  $\mu$  non nul tel que  $A^2 = -\mu^2 I_2$ .

On pourra utiliser le résultat de la proposition 1.

**Q 35.** Étant donné un vecteur  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , justifier l'égalité  $\langle X_0, AX_0 \rangle = 0$ .

On pourra considérer la trajectoire de la solution du système  $X'(t) = AX(t)$  vérifiant la condition initiale  $X(0) = X_0$  et utiliser le résultat de la proposition 2.

**Q 36.** En déduire que toutes les trajectoires du système différentiel  $X'(t) = AX(t)$  sont sphériques si et seulement si la matrice  $A$  est antisymétrique.

### III.C – Systèmes différentiels à trajectoires sphériques en dimension 3

Dans cette sous-partie, on suppose que  $n = 3$  et que l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est orienté par sa base canonique.

On dit qu'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  est antisymétrique si sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est antisymétrique.

**Q 37.** On considère un vecteur  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  non nul dans  $\mathbb{R}^3$ . Démontrer que l'application

$$f_\omega : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto \omega \wedge x \end{cases}$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et que cet endomorphisme est antisymétrique.

On considère un vecteur  $v$  non nul dans  $\mathbb{R}^3$  et orthogonal à  $\omega$ . On admet que l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto \omega \wedge x + \langle x, \omega \rangle v \end{cases}$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

On considère une fonction  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = g(X(t))$ , c'est-à-dire  $X'(t) = \omega \wedge X(t) + \langle X(t), \omega \rangle v$ .

L'objectif des questions suivantes est de montrer que la trajectoire de  $X$  est sphérique.

**Q 38.** Pour tous vecteurs  $x, y$  et  $z$  dans  $\mathbb{R}^3$ , montrer l'égalité  $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$ .

On pourra, par exemple, considérer d'abord le cas où la famille  $(y, z)$  est liée. Puis, lorsqu'elle est libre, on pourra considérer une base orthonormée  $(e_2, e_3)$  du plan  $\text{Vect}(y, z)$  choisie de manière à écrire  $y = y_2 e_2$  et  $z = z_2 e_2 + z_3 e_3$ , où  $y_2, z_2$  et  $z_3$  sont des réels. On posera alors  $e_1 = e_2 \wedge e_3$  et on écrira  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ , où  $x_1, x_2, x_3$  sont des réels.

**Q 39.** Calculer  $\frac{d}{dt}(\langle X(t), \omega \rangle)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et en déduire qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\langle X(t), \omega \rangle = K$ .

**Q 40.** On pose  $\alpha = \frac{K}{\|\omega\|^2}$  et  $a = \alpha(\omega + \omega \wedge v)$ . Montrer qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|X(t) - a\|^2 = \|X(t)\|^2 - 2\alpha \langle X(t), \omega \wedge v \rangle + C.$$

**Q 41.** En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dt}(\|X(t) - a\|^2) = 2\langle X(t), \omega \rangle \langle X(t), v \rangle - 2\alpha \langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle$ .

**Q 42.** En interprétant  $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle$  comme un déterminant, justifier l'égalité  $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle = \langle X(t), v \rangle \|\omega\|^2$ .

**Q 43.** En déduire que la trajectoire de  $X$  est sphérique.

• • • FIN • • •