Q 1. [NdC : on suppose que la formule d'intégration par parties est vraie sur un segment, pour des fonctions complexes. Sinon, la rédaction devient beaucoup plus longue]
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, toutes les intégrandes considérées sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Les intégrales manipulées n'ont donc qu'une seule singularité : $+\infty$.
Soit $A > 0$, par intégration par parties sur le segment $[0, A]$ (les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ dessus)

$$\int_0^A u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^A - \int_0^A u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, ce crochet admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$, cette limite étant notée $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$.
Ainsi, les deux quantités $\int_0^A u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^A u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ ont même nature lorsque $A \to +\infty$: les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ ont $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ ont donc la même nature.
En cas de convergence, on obtient donc immédiatement par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^A u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Q 2. Soit $p > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, par opération sur les fonctions continues.
Par positivité de l'exponentielle, pour tout $t \geq 0$, $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}$.
Par hypothèse, comme $f \in E$, alors $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge.

Q 3. Si $f \in E$, on a bien $\mathcal{L}(f)$ qui est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a bien $\lambda f + \mu g \in E$.
De plus, par linéarité de l'inégrale généralisée convergente, pour $p > 0$,

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t + \mu \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On a donc bien écrit : pour tout $p > 0$

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(p) = \lambda\mathcal{L}(f)(p) + \mu\mathcal{L}(g)(p).$$

On a donc l'égalité des fonctions :

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g).$$

Ainsi, $\mathcal{L}$ est linéaire.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, si $p > 0$, alors par croissances comparées :

$$t^n\mathrm{e}^{-pt/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$t^n\mathrm{e}^{-pt/2} = o(1),$$

donc

$$t^n\mathrm{e}^{-pt} = t^n\mathrm{e}^{-pt/2}\mathrm{e}^{-pt/2} = o\left(\mathrm{e}^{-pt/2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (intégrale de référence, vu que $\frac{p}{2} > 0$).
Par comparaison de fonctions intégrables, la fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-pt}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} |t^n|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge donc.
Ainsi, $f_n \in E$.

Q 5. On a immédiatement par le cours $F_0(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{p}$.
On le retrouve par primitivation directe : pour $A > 0$

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^A = \frac{1 - \mathrm{e}^{-pA}}{p}.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on obtient la valeur demandée par passage à la limite.

Q 6. On utilise le théorème d'intégration par parties généralisé avec $v : t \mapsto t^n$ et $u : t \mapsto -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$. Ces fonctions u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a par croissances comparées $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'on a $u' : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$ et $v' : t \mapsto nt^{n-1}$. Remarquons qu'alors $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$.
On a alors (la première intégrale convergeant, ce qui assure la convergence de la deuxième)

$$F_n(t) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = 0 - \left(-\frac{n}{p}\right)\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

soit

$$F_n(p) = \frac{n}{p}F_{n-1}(p).$$

Q 7. On fixe $p > 0$, et on montre le résultat demandé par récurrence simple sur n.
Pour $n = 0$, on a déjà obtenu $F_0(p) = \frac{1}{p} = \frac{0!}{p^{0+1}}$.
Soit $n \geq 1$, supposons que $F_{n-1}(p) = \frac{(n-1)!}{p^n}$. On a alors par la relation précédente :

$$F_n(p) = \frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

On a donc bien démontré par récurrence simple que pour tout $n \geq 0$: $F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Q 8. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-a+ibt}$ est bien continue, comme exponentielle complexe d'une fonction continue. Soit $p > 0$, on a

$$|f_{a,b}(t)|\mathrm{e}^{-pt} = \mathrm{e}^{-(a+p)t}.$$

Or, comme $a \geq 0$ et $p > 0$, on a $a + p > 0$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_{a,b}(t)|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), donc $f_{a,b} \in E$.
On a ensuite par primitivation directe, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^A \mathrm{e}^{-(a+p-ib)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+p-ib}\mathrm{e}^{-(a+p-ib)t}\right]_0^A = \frac{1-\mathrm{e}^{-(a+p-ib)A}}{a+p-ib}$$

Or, on a

$$|\mathrm{e}^{-(a+p-ib)A}| = |\mathrm{e}^{-(a+p)A}\mathrm{e}^{-ibA}| = \mathrm{e}^{-(a+p)A},$$

et comme $a + p > 0$, on a $\mathrm{e}^{-(a+p)A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$:

$$F_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+p-ib}.$$

Q 9. On a pour $t \in \mathbb{R}$, par les formules d'Euler :

$$g_{a,b}(t) = \mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{e}^{ibt} + \mathrm{e}^{-ibt}}{2} = \frac{1}{2}\left(f_{a,b}(t) + f_{a,-b}(t)\right)$$

Ainsi, $g_{a,b} = \frac{1}{2}f_{a,b} + \frac{1}{2}f_{a,-b}$
On obtient de même $h_{a,b} = \frac{1}{2i}f_{a,b} - \frac{1}{2i}f_{a,-b}$.
Comme $f_{a,b}$ et $f_{a,-b}$ appartiennent à E et comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ appartiennent à E.
On a alors par linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(p) &= \frac{1}{2}F_{a,b}(p) + \frac{1}{2}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+p-ib} + \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} H_{a,b}(p) &= \frac{1}{2i}F_{a,b}(p) - \frac{1}{2i}F_{a,-b}(p) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{a+p-ib} - \frac{1}{a+p+ib}\right) \\ &= \frac{b}{(a+p)^2+b^2} \end{aligned}$$

Remarque : on aurait aussi pu démontrer, en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$, que pour une fonction $f \in E$, $\mathcal{L}(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\mathcal{L}(f))$ (*idem* pour la partie imaginaire), puis observer que $g_{a,b} = \mathrm{Re}(f_{a,b})$ et $h_{a,b} = \mathrm{Im}(f_{a,b})$.

Q 10. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée. Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$: $|f(t)| \leq M$.
On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $p > 0$:

$$|f(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leq M\mathrm{e}^{-pt}.$$

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, $f \in E$.

Q 11. La fonction exponentielle (exp) est bien continue, or pour $p = \frac{1}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t/2}\mathrm{d}t$$

diverge (intégrale de référence).
On vient donc de trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui n'appartient pas à E : la fonction exponentielle.

Q 12. On applique le théorème d'intégration par parties pour à f et à $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$. Ces deux fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $v' : t \mapsto -p\mathrm{e}^{-pt}$ et par hypothèse on a bien $f(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a notamment, comme $v(0) = 1$, $[f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} = -f(0)$.
Alors, toutes les intégrales écrites ici convergeant :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = [f(t)v(t)]_{t=0}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

soit exactement

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

Q 13. La fonction f' vérifie donc les hypothèses de la question précédente : pour tout $p > 0$, on a donc

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)) - f'(0) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

Q 14. La fonction $t \mapsto t^k$ est de degré k, et la fonction $t \mapsto (1-t)^{n-k}$ est de degré $n-k$, donc par produit B_n^k est de degré n.

Q 15. Par la formule du binôme de Newton (sur les réels) : pour tout $t \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = (t+1-t)^n = 1.$$

Q 16. [NdC : la notion d'espace probabilisé – telle que présentée ici – est hors programme. Il n'est pas forcément clair de savoir quelle définition d'espérance choisir.]
En notant $X = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathbb{R}^+$ l'image (finie) de Z, on a alors (on utilise la définition d'espérance de première année) :

$$E[Z] = x_1P(Z = x_1) + \cdots + x_pP(Z = x_p).$$

Or, tous ces termes sont positifs, donc $E[Z] \geq 0$.
On utilise maintenant la linéarité de l'espérance : comme X, Y sont finies, alors $Y - X$ est aussi finie, de plus $Y - X \geq 0$, donc $E[Y-X] \geq 0$, donc $E[Y] - E[X] \geq 0$, donc $E[Y] \geq E[X]$.

Q 17. On a par linéarité de l'espérance, et vu que l'espérance d'une constante est égale à cette constante,

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2. \end{aligned}$$

Q 18. Comme on a toujours $(X - E[X])^2 \geq 0$, et comme $(X - E[X])^2$ est une variable aléatoire finie, alors

$$V(X) \geq 0,$$

donc

$$E[X]^2 \leq E[X^2],$$

ce qui donne donc par croissance de la fonction racine carrée :

$$|E[X]| \leq \sqrt{E[X^2]}.$$

Q 19. On a $E[S_n] = nt$ et $V(S_n) = nt(1-t)$.

Q 20. On a donc par linéarité de l'espérance et en utilisant $E[t] = t$ (loi constante) :

$$E\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = \frac{1}{n}E(S_n) - t = \frac{nt}{n} - t = 0.$$

De plus, comme $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = t$, alors

$$E\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Q 21. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, φ' est continue sur ce segment.
Par le théorème des bornes atteintes, φ' est bornée sur $[0,1]$: il existe donc $M_\varphi > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$: $|\varphi'(t)| \leq M_\varphi$.
On peut alors utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[0,1]$: pour tout $a, b \in [0,1]$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq M_\varphi |b - a|$.
On pouvait aussi écrire en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel : $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\mathrm{d}t$, puis majorer cet intégrale par l'inégalité triangulaire.

Q 22. On a par la question **Q 18.** :

$$|E(X_n)| \leq \sqrt{E(X_n^2)}.$$

Or,

$$X_n^2 = \left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right|^2$$

Or, on a toujours $0 \leq S_n \leq n$, donc $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1$, donc on peut appliquer la question précédente :

$$\left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right| \leq M_\varphi \left|\frac{S_n}{n} - t\right|.$$

Ainsi, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$\left|\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)\right|^2 \leq M_\varphi^2 \left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2.$$

Ainsi, par croissance de l'espérance (**Q 16.**) :

$$E(X_n^2) \leq M_\varphi^2 E\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right)$$

soit par les valeurs obtenues en **Q 20.**

$$E(X_n^2) \leq M_\varphi^2 \frac{t(1-t)}{n}.$$

Par croissance de la racine carrée, comme $M_\varphi > 0$ et $t(1-t) \geq 0$, on a donc

$$|E(X_n)| \leq \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q 23. On applique la formule de transfert, appliquée à S_n et à la fonction $t \mapsto \varphi\left(\frac{t}{n}\right)$:

$$E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t).$$

On a donc par linéarité de l'espérance :

$$E(X_n) = E\left(\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) - \varphi(t).$$

On obtient donc en appliquant le résultat obtenu à la question précédente :

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leq M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

Q 24. La fonction w est un trinôme du second degré de coefficient dominant strictement négatif, de racines 0 et 1. Elle admet donc un maximum, atteint au milieu de ces deux racines, soit en $\frac{1}{2}$. La valeur de ce maximum est donc $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Q 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$P_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t).$$

En tant que combinaison linéaire de fonctions polynomiales (les B_n^k), P_n est une fonction polynomiale. On vient aussi de montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$|\varphi(t) - P_n(t)| \leq \frac{M_\varphi}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, la constante $\frac{M_\varphi}{2\sqrt{n}}$ majore la fonction $|\varphi - P_n|$ sur $[0,1]$, donc par définition d'une borne supérieure

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \leq \frac{M_\varphi}{2\sqrt{n}}.$$

Or,

$$\frac{M_\varphi}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par encadrement,

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Q 26. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème fondamental du calcul différentiel (on admet qu'il est valide pour une fonction à valeurs complexes), la fonction g en est une primitive.
Ainsi, g est dérivable, et pour tout $t \geq 0$: $g'(t) = f'(t)\mathrm{e}^{-t}$.

Q 27. On a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}(f)(1)=0$. Ainsi, on a aussi (par définition, ou en écrivant $|g(t)| = \sqrt{\mathrm{Re}(g)^2+\mathrm{Im}(g)^2}$, qui tendent toutes deux vers 0) $|g(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}$.

En considérant la définition quantifiée de la limite : il existe $A>0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|g(t)| \leq 1$.
Or, la fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0,A]$ (de même, en écrivant $|g(t)| = \sqrt{\mathrm{Re}(g)^2+\mathrm{Im}(g)^2}$ et en utilisant les résultats des opérations sur les limites). On peut donc appliquer le théorème des bornes atteintes : la fonction $|g|$ est bornée sur $[0,A]$, donc il existe $M>0$ tel que pour tout $t\in[0,A]$, $|g(t)| \leq M$.
Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $|g(t)| \leq \max(M,1)$. La fonction g est donc bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. La fonction g est continue, car dérivable, et bornée. Par la question **Q10**, g appartient à E, donc $\mathcal{L}(g)(p)$ existe pour tout $p>0$.

Montrons que g vérifie les hypothèses de la question **Q 12**. Comme $g' : t\mapsto f'(t)\mathrm{e}^{-t}$, g' est continue, comme produit de deux fonctions continues. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$.
Enfin, si $p>1$, $g'(t)\mathrm{e}^{-pt} = f(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}$. Comme $f\in E$ et comme $p+1>0$, alors $\int_0^{+\infty}|f(t)|\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t$ converge, donc $g'\in E$.
Enfin, comme g est bornée, il existe $M>0$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $|g(t)|\leq M$. Pour $p>0$, $|g(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |g(t)|\mathrm{e}^{-pt} \leq M\mathrm{e}^{-pt}$. Comme $\mathrm{e}^{-pt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a par majoration $|g(t)\mathrm{e}^{-pt}| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g(t)\mathrm{e}^{-pt} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a
$$\mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(g)(p) - g(0).$$
Comme $g(0)=0$ et comme
$$\mathcal{L}(g')(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(p+1),$$
on obtient bien
$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

Q 29. On admet que les arguments usuels sont toujours valides pour les fonctions complexes.
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $u\mapsto -\ln(u)$ étant continue et à valeurs positives sur $]0,1]$, la fonction g est continue sur $]0,1]$ comme composée de fonctions continues.
De plus, $-\ln(u) \underset{u\to0,u>0}{\longrightarrow} +\infty$, or $\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
Par compositions de limites, $g(-\ln(u)) \underset{u\to0,u>0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, soit $\varphi(u) \underset{u\to0,u>0}{\longrightarrow} \varphi(0)$.
Ainsi, φ est aussi continue en 0, donc est bien continue sur $[0,1]$.

Q 30. La fonction $\psi : u\mapsto -\ln(u)$ réalise une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer la formule de changement de variable, sous réserve de convergence de l'une des intégrales écrites (ici, la première), en utilisant le fait que pour tout $0<u\leq1$, $\psi'(u) = -\frac{1}{u}$.
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t &= \int_1^0 g(-\ln(u))\mathrm{e}^{-p(-\ln(u))}\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\ &= -\int_1^0 g(-\ln(u))\mathrm{e}^{p\ln(u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 \varphi(u)u^p\frac{1}{u}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Q 31. Comme $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle, on a pour tout $n>0$: $\mathcal{L}(f)(n+2)=0$, donc par la question **Q 28** on obtient $\mathcal{L}(g)(n)=0$, soit par la question précédente
$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^n\mathrm{d}u = 0.$$

Soit P une fonction polynomiale. Il existe donc des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que $P : t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.
Par linéarité de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^1 P(u)\varphi(u)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \varphi(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Q 32. Commençons par étendre le résultat de la partie III au cas où φ est une fonction continue à valeurs complexes. En notant φ_r et φ_i ses parties réelles et imaginaires, respectivement, alors φ_r et φ_i sont continues, à valeurs réelles et définies sur le segment $[0,1]$.
Ainsi, il existe deux suites (P_n) et (Q_n) de polynômes réels tels que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi_r(t) - P_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_i(t) - Q_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $t \in [0,1]$, on a alors en posant $R_n(t) = P_n(t) + iQ_n(t)$, qui est donc bien un polynôme (à coefficients complexes),

$$|\varphi(t) - (P_n(t) + iQ_n(t)| = |\varphi_r(t) - P_n(t) + i(\varphi_i(t) - Q_n(t))| \leq |\varphi_r(t) - P_n(t)| + |\varphi_i(t) - Q_n(t)|$$

donc

$$|\varphi(t) - R_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_r(t) - P_n(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_i(t) - Q_n(t)|\,,$$

donc

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - R_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_r(t) - P_n(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |\varphi_i(t) - Q_n(t)|\,.$$

Par encadrement, on a donc

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - R_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Considérons maintenant une suite de polynômes (P_n) complexes telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons $M_n = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|$ et pour tout $M = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$ (qui existe par continuité de φ sur le segment $[0,1]$ et le théorème des bornes atteintes).
On a alors

$$\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (P_n(t) - \varphi(t))\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire puis par croissance de l'intégrale,

$$\left|\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |P_n(t) - \varphi(t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 M_n M \leq M_n M.$$

On a donc par majoration

$$\left|\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Q 33. Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0,$$

on a par la question précédente

$$\int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

soit
$$\int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t.$$
Remarquons que φ étant complexe (car g l'est aussi, car f l'est aussi), on ne peut ici conclure.
Traitons d'abord le résultat dans le cas où f (donc ϕ) est réelle. La fonction ϕ^2 est donc continue sur $[0,1]$, positive, d'intégrale nulle, donc ϕ^2 est nulle sur $[0,1]$, donc ϕ est nulle sur $[0,1]$, ce qui signifie que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a alors pour $t \geq 0$: $f(t) = g'(t)\mathrm{e}^t = 0$.
Démontrons le cas général. Décomposons f en ses parties réelles (f_r) et imaginaires (f_i) :
$$f = f_r + f_i.$$
Comme $f_r^2 \leq |f|^2$, on obtient $|f_r| \leq |f|$, et l'on montre par majoration que $f_r \in E$. De même, $f_i \in E$.
Par linéarité de l'intégrale, on a donc pour tout $p > 0$:
$$0 = \mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(f_r)(p) + i\mathcal{L}(f_i)(p).$$
Comme $L(f_r)(p)$ et $L(f_i)(p)$ sont réelles, on obtient donc $L(f_r)(p) = L(f_i)(p) = 0$.
On applique le résultat réel à f_r et à f_i, donc $f_r = f_i = 0$, donc $f = 0$.

Q 34. On a montré que $\mathcal{L}$ est linéaire. La dernière question montre que $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{0\}$. Ainsi, $\mathcal{L}$ est injective.

Q 35. On considère une fonction y de la forme $y : t \mapsto at + b$. On a alors pour tout t : $y'(t) = a$ et $y''(t) = 0$.
Ainsi,
$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2at + 2b + 2a.$$
On voit immédiatement que $y : t \mapsto \frac{t}{2}$ est solution.

Q 36. L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, soit $(r+1)^2 = -1$, équivaut à $r + 1 = \pm i$, et qui admet donc $-1 \pm i$ pour solutions simples.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme
$$y : t \mapsto (\lambda\cos(t) + \mu\sin(t))\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}.$$
Soit y une telle fonction. On a $y(0) = \lambda$, donc $y(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$.
On considère donc que $\lambda = 0$, donc $y : t \mapsto \mu\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}$.
On calcule alors $y'(t) = \mu\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \mu\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}$. On a alors $y'(0) = \mu + \frac{1}{2}$, donc $y'(0) = 1$ si et seulement si $\mu = \frac{1}{2}$.
Ainsi, l'unique solution à ce problème de Cauchy est
$$t \mapsto \frac{1}{2}\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}.$$

Q 37. Comme
$$\mathcal{L}(y')(p) = p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = p\mathcal{L}(y)$$
et
$$\mathcal{L}(y'')(p) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - py(0) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y)(p) - 1,$$
on a par linéarité de $\mathcal{L}$:
$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + 2y) = \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = (p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1.$$
Or, avec $d : t + 1$, on a $d = f_0 + f_1$, donc par linéarité de $\mathcal{L}$,
$$\mathcal{L}(d)(p) = F_0(p) + F_1(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.$$
On obtient donc
$$(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2},$$
soit
$$(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1 + p + p^2}{p^2}.$$

Q 38. On raisonne par analyse-synthèse. En multipliant cette relation par p^2, on obtient que pour tout $p > 0$:

$$\frac{1+p+p^2}{p^2+2p+2} = a + \frac{bp^2}{(p+1)^2+1}.$$

En faisant tendre p vers 0, on obtient $a = \frac{1}{2}$.
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$1 = a + b,$$

donc on obtient $b = \frac{1}{2}$.
Il suffit de vérifier par simple calcul que l'on a bien

$$\frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Q 39. On a donc linéarité de $\mathcal{L}$ et les résultats obtenus en II.C :

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2} = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}G_{1,1} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(f_1 + h_{1,1})\right).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$y = \frac{1}{2}(f_1 + h_{1,1}),$$

soit

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}(t + \sin(t)\mathrm{e}^{-t}).$$

Q 40. Cette fonction y est bien de classe $\mathcal{C}^2$, par opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
On a bien $y(0) = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$y'(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t}),$$

donc $y'(0) = 1$, et

$$y''(t) = \frac{1}{2}(-\sin(t) - \cos(t) - \cos(t) + \sin(t))\mathrm{e}^{-t} = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t}.$$

On a donc bien

$$y''(t) + 2ty'(t) + 2y(t) = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} + 1 + \cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t} + t + \sin(t)\mathrm{e}^{-t} = t + 1.$$

Ainsi, y est bien solution du problème de Cauchy (IV.1).

Q 41. On voit immédiatement (considérer la somme des coefficients de chaque ligne de A) que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas nul, -1 est une valeur propre de A, et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
Or, $\mathrm{tr}(A) = -5$. Comme la trace de A est la somme des valeurs propres complexes de A, répétées avec leurs multiplicités, on en déduit que -4 est aussi une valeur propre complexe de A.
Ainsi, A possède deux valeurs propres complexes, qui sont donc simples étant donné que A est de dimension 2. On en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
Par les remarques précédentes, on a déjà $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Observons aussi que $A+4I_2=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 6 & -3\end{pmatrix}$, de sorte que dans cette matrice on a $C_1+2C_2=0$. Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (qui est non nul) est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. On a donc $E_{-4}(A)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Une matrice de passage vers une base de diagonalisation est donc

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

On a bien $A=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}P^{-1}$.

Q 42. [NdC : je comprends la question comme « déterminer les fonctions u et v de sorte que x et y vérifient le système (IV.2) ».]

On voit que pour tout t :

$$U'(t)=P^{-1}X'(t)=P^{-1}PDP^{-1}X(t)=DU(t)$$

Ainsi, X est solution si et seulement si U vérifie le système différentiel $U'=DU$, donc si et seulement si $u'=-u$ et $v'=4v$, donc si et seulement si u est de la forme $u : t\mapsto \lambda e^{-t}$ et v est de la forme $t\mapsto \mu e^{-4t}$.

Comme $X=PU$, on a $x=u+v$ et $y=u+2v$, donc les solutions du système différentiel sont les couples de fonctions (x,y) de la forme

$$x : t\mapsto \lambda e^{-t}+\mu e^{-4t} \quad \text{et} \quad y : t\mapsto \lambda e^{-t}+2\mu e^{-4t}.$$

Pour deux fonctions de cette forme, on a alors $x(0)=\lambda+\mu$ et $y(0)=\lambda+2\mu$.

On a alors $y(0)-x(0)=\mu$ et $2x(0)-y(0)=\lambda$.

Ainsi, (x,y) est solution si et seulement si $\mu=1$ et $\lambda=-1$.

Le couple solution est donc

$$x : t\mapsto -e^{-t}+e^{-4t} \quad \text{et} \quad y : t\mapsto -e^{-t}+2e^{-4t}.$$

Q 43. Soit $p>0$. On a donc

$$\mathcal{L}(x')(p)=p\mathcal{L}(x)(p)-x(0)=p\mathcal{L}(x)(p)$$

et

$$\mathcal{L}(y')(p)=p\mathcal{L}(y)(p)-y(0)=p\mathcal{L}(y)(p)-1,$$

donc par linéarité de $\mathcal{L}$ on obtient le système

$$\begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) &= 2\mathcal{L}(x)(p)-3\mathcal{L}(y)(p)\\ p\mathcal{L}(y)(p)-1 &= 6\mathcal{L}(x)(p)-7\mathcal{L}(y)(p)\end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} (p-2)\mathcal{L}(x)(p)+3\mathcal{L}(y)(p) &= 0\\ -6\mathcal{L}(x)(p)+(p+7)\mathcal{L}(y)(p) &= 1\end{cases}.$$

En effectuant l'opération $6L_1+(p-2)L_2$, on obtient

$$(18+(p-2)(p+7))\mathcal{L}(y)(p)=p-2.$$

Or, $(18+(p-2)(p+7))=p^2+5p+4=(p+1)(p+4)$, donc on a bien

$$\mathcal{L}(y)(p)=\frac{p-2}{(p+1)(p+4)}.$$

En effectuant l'opération $(p+7)L_1-3L_2$, on obtient

$$((p-2)(p+7)+18)\mathcal{L}(x)(p)=-3,$$

soit

$$\mathcal{L}(x)(p)=\frac{-3}{(p+1)(p+4)}.$$

Q 44. On écrit $-3 = (p+1) - (p+4)$, donc en simplifiant

$$\mathcal{L}(x)(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{1}{p+4}.$$

De même, on écrit $p - 2 = 2(p+1) - (p+4)$, donc

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{2}{p+4}.$$

Q 45. On observe donc que

$$\mathcal{L}(x) = -G_{1,0} + G_{4,0} = \mathcal{L}(-g_{1,0} + g_{4,0}).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$x = -g_{1,0} + g_{4,0},$$

soit

$$x : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-4t}.$$

De même,

$$\mathcal{L}(y) = -G_{1,0} + 2G_{4,0} = \mathcal{L}(-g_{1,0} + 2g_{4,0}).$$

Par injectivité de $\mathcal{L}$, on a donc

$$y = -g_{1,0} + 2g_{4,0},$$

soit

$$y : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-4t}.$$

Q 46. Ces deux fonctions x, y sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient bien $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$.
De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = \mathrm{e}^{-t} - 4\mathrm{e}^{-4t} = 2(-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-4t}) - 3(-\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-4t}) = 2x(t) - 3y(t)$$

et

$$y'(t) = \mathrm{e}^{-t} - 8\mathrm{e}^{-4t} = 6(-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-4t}) - 7(-\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-4t}) = 6x(t) - 7y(t)$$

Le couple des solutions de ce problème de Cauchy est donc bien composé des deux fonctions trouvées précédemment, ce qui conclut ce problème.