Révisions aux concours

Mécanique de TSI1

Exo 1 : Action mécanique d'une liaison pivot

On considère un pendule pesant constitué d'un barreau fin et homogène de longueur L et de masse M, relié à un bâtit fixe par une liaison pivot d'axe (Oz). On donne son moment d'inertie par rapport à (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \frac{ML^2}{3}.$$

On note θ l'angle que fait le barreau avec la verticale descendante et on lâche le barreau sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle $\theta_0 \simeq \pi$.

1. Représenter le dispositif.

2. Déterminer l'équation du mouvement.

3. En déduire une intégrale première du mouvement.

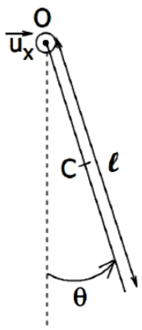
4. Rappeler les vecteurs position, vitesse et accélération du centre de gravité du barreau dans une base adaptée au problème. En déduire l'expression de l'accélération en fonction de θ, L, m et g.

5. En déduire la force exercée par le bâtit sur le barreau au niveau de la liaison pivot.

6. Conclure quant-à l'action mécanique de la liaison pivot.

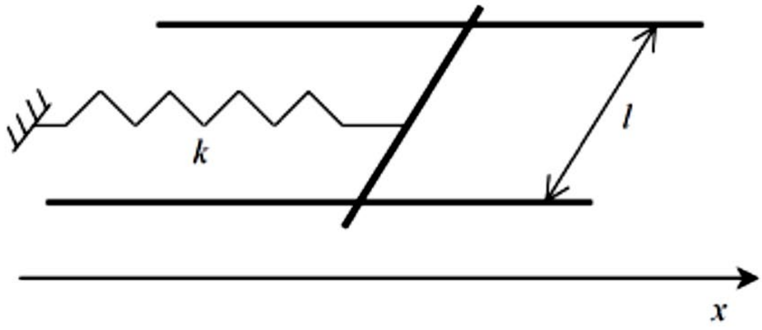
Exo 2 : Approche énergétique du pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur l en pivot parfait autour de l'axe Ox. Sa position est repérée par l'angle θ. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Ox est $J_{Ox} = \frac{1}{3} ml^2$.



1. Évaluer l'énergie cinétique de la tige à un instant quelconque.
2. Faire de même avec son énergie potentielle de pesanteur.
3. Quelles sont les actions extérieures subies par la tige ? Calculer leur puissance.
4. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.
5. Trouver une intégrale première du mouvement. En déduire l'équation du mouvement de la tige.
6. La résoudre dans le cadre des petites oscillations sachant qu'initialement la tige est dans la position verticale $\theta = 0$, avec une vitesse angulaire $\omega_0 > 0$. Donner une condition sur ω_0 pour être effectivement dans cette approximation.
7. On ne se place plus forcément dans le cadre des petites oscillations. En faisant une étude énergétique, montrer que suivant les valeurs de ω_0 deux types de mouvement sont possibles. Les décrire.
   Quelle valeur de ω_0, notée ω_c est à la limite des deux situations ?

Exo 3 : Oscillations amorties d'une barre sur des rais



Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée (Ox). La barre est liée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N.m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$. L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos. On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. A l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = a$ avec $a > 0$.

1.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la barre.

1.2 Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.

1.3 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.

1.4 Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottements visqueux $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et h un coefficient positif. On pose $2\alpha = \frac{h}{m}$ et on rappelle que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

1.5 Trouver quelle est la dimension de h et donner son unité S.I.

1.6 Établir l'équation différentielle du mouvement et donner l'expression du facteur de qualité Q.

1.7 On suppose $\alpha \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t.

1.8 Représenter l'allure du graphe de $x(t)$ en fonction de t.

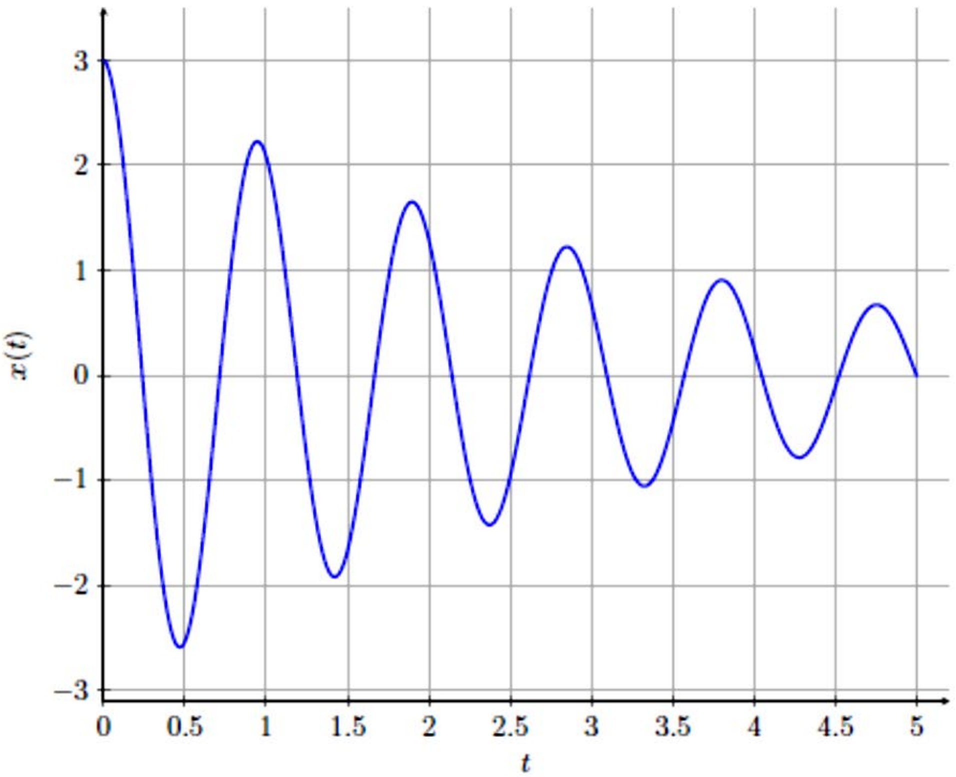
1.9 La condition d'amortissement faible précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique à l'instant t peut se mettre sous la forme approchée :

$$E_m(t) = \frac{ka^2}{2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

On donnera l'expression de τ.

On a réalisé un relevé expérimental de $x(t)$ en vue d'identifier les paramètres du système :

Position $x(t)$ de la barre



1.10 Montrer que le décrément logarithmique définit par $\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$ peut s'exprimer en fonction de Q par la formule :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

En déduire la valeur de Q grâce au relevé expérimental.

1.11 Mesurer la valeur de la pseudo-période T puis en déduire les valeurs de m et h.