

Correction DM - Ailette de refroidissement

1. On applique le premier principe de la thermodynamique à une longueur dx d'ailette :

$$j_{th}(x)\pi a^2 dt - j_{th}(x+dx)\pi a^2 dt - h(T(x) - T_e)2\pi a dx dt = 0$$

Soit :
$$-\frac{dj_{th}(x)}{dx}a - 2h(T(x) - T_e) = 0$$

En utilisant la loi de Fourier :
$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}T(x) = \frac{2h}{\lambda a}T_e$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$T(x) = Ae^{\frac{x}{D}} + Be^{-\frac{x}{D}} + T_e \quad (\text{Avec : } D = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}})$$

L'ailette étant de longueur infinie, $A = 0$:
$$T(x) = Be^{-\frac{x}{D}} + T_e$$

La condition au limite en $x = 0$ permet de calculer B :
$$T(x) = (T_0 - T_e)e^{-\frac{x}{D}} + T_e$$

On constate que la température de l'ailette tend vers celle du milieu environnant lorsque la distance x à l'origine est \gg que la distance caractéristique D .

2. Intérêt de l'ailette de refroidissement : finalement, on peut s'interroger sur la valeur du flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère.

On détermine ce flux (ou cette puissance) à l'aide de la loi de Fourier en $x = 0$.

En effet, en régime permanent, ces deux flux thermiques sont identiques puisque l'ailette cède à l'air ambiant tout ce qu'elle reçoit.

Ainsi, ce flux vaut :
$$\Phi_c = -\pi a^2 \lambda \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\lambda}{D} \pi a^2 (T_0 - T_e)$$

On aurait obtenu le même résultat en intégrant sur toute la surface latérale de la barre le flux conducto-

convectif :
$$\Phi_c = \int_0^\infty h(T(x) - T_e)2\pi a dx = 2\pi ah \int_0^\infty (T_0 - T_e)e^{-\frac{x}{D}} dx$$

Soit :
$$\Phi_c = 2\pi ahD(T_0 - T_e) = \frac{\lambda a}{D^2} \pi a D (T_0 - T_e) = \frac{\lambda}{D} \pi a^2 (T_0 - T_e)$$

On retrouve bien la même expression de la puissance.

En l'absence d'ailette, le flux aurait été :
$$\Phi_{c,0} = h\pi a^2 (T_0 - T_e)$$

Le rapport de ces deux flux vaut :
$$\frac{\Phi_c}{\Phi_{c,0}} = \frac{\lambda}{hD}$$

Avec des valeurs numériques courantes, ce rapport est de l'ordre de 71 ; on voit bien ici l'intérêt de cette ailette de refroidissement.