

# CCINP 2024-TSI Physique-Chimie

Correction proposée par Clément BEAUFILS

**Q1.** ▷ L'équation de MA (sous sa forme la plus générale, valable dans tous les milieux) est :  $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$  avec

- $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  les champs électrique et magnétique
- $\vec{j}$  la densité volumique de courant en A/m<sup>2</sup>
- $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}$  H/m la perméabilité magnétique du vide
- $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide reliée à  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s (célérité de la lumière dans le vide) via :  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2 \Rightarrow \epsilon_0 \simeq 1/(36\pi) \times 10^{-9}$  F/m

**Q2.** ▷ En magnétostatique,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$  et donc MA devient :  $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

▷ *Remarque* : Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), on a plutôt  $\mu_0 \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \mu_0 \left\| \vec{j} \right\|$  ce qui peut

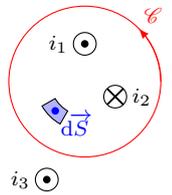
également s'écrire :  $\left\| \vec{j}_D \right\| \ll \left\| \vec{j} \right\|$  en posant  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  le courant de déplacement.

L'équation de MA se simplifie donc dans l'ARQS sous la même forme qu'en magnétostatique :  $\text{rot } \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$

**Q3.** ▷ Pour cette question on utilise le schéma de la figure ci-contre. On envisage un champ magnétique créé par trois fils parcourus par des courants  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$ .

Le contour d'Ampère  $\mathcal{C}$  est un cercle orienté en sens direct (voir la flèche) mais il pourrait être totalement quelconque puisque l'on ne va pas exploiter le fait que ce contour est un cercle pour démontrer le théorème d'Ampère.

Le courant algébrique traversant une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$  est compté positivement s'il est dans le même sens que le vecteur surface  $d\vec{S}$ . Le sens de  $d\vec{S}$  est reliée à l'orientation du contour d'Ampère  $\mathcal{C}$  par la règle de la main droite (= règle du tournevis).



▷ On intègre l'équation de MA sur une surface  $S(\mathcal{C})$  s'appuyant le long du contour  $\mathcal{C}$  :  $\iint_{S(\mathcal{C})} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S(\mathcal{C})} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$

▷ D'après le théorème de Stokes, on a  $\iint_{S(\mathcal{C})} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  : la circulation de  $\vec{B}$  le long du contour  $\mathcal{C}$ .

▷ De plus, par définition de la densité volumique de courant  $\iint_{S(\mathcal{C})} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{traversant } S(\mathcal{C})} = \mu_0 I_{\text{enlacée par } \mathcal{C}}$

▷ On a donc bien établi le théorème d'Ampère en intégrant MA :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{traversant } S(\mathcal{C})} = \mu_0 I_{\text{enlacée par } \mathcal{C}}}$$

▷ Sur le schéma représenté plus haut, et avec l'orientation choisit, on aurait  $I_{\text{traversant } S(\mathcal{C})} = \mu_0 I_{\text{enlacée par } \mathcal{C}} = i_1 - i_2$  puisque  $i_1$  (resp.  $i_2$ ) traverse  $S(\mathcal{C})$  dans le même sens (resp. dans le sens contraire) que  $d\vec{S}$ .  $i_3$  n'est pas comptabilisé puisque qu'il ne traverse pas  $S(\mathcal{C})$ .

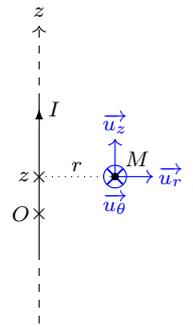
▷ *Remarques* :

— On a utilisé les formes « compactes » pour les notations.  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  est à comprendre sous la forme  $\int_{M \in \mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}(M)$

— Dans la plupart des situations, la circulation de  $\vec{B}$  ne se calcule pas facilement (voire pas du tout de manière analytique). C'est seulement dans les problèmes avec des symétries et des invariances et en choisissant un contour d'Ampère pertinent que l'on peut se servir du théorème d'Ampère pour calculer un champ magnétique (voir les 2 questions suivantes).

— En posant  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  le courant de déplacement, on peut faire la même démonstration pour démontrer le théorème d'Ampère généralisé.

**Q4.** ▷ Symétries de la distribution de courant :  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est **plan de symétrie de la distribution de courant**. Donc  $\vec{B}(M)$  est **orthogonal à ce plan**. D'où,  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$  avec  $r, \theta$  et  $z$  les coordonnées cylindriques.

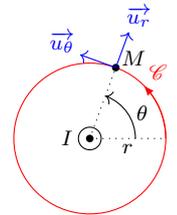


▷ *Remarque* : le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courant et donc  $\vec{B}(M)$  est contenu dans ce plan. Ce seul plan ne suffisait donc pas à déterminer la direction de  $\vec{B}$ .

▷ Ce résultat est cohérent avec la règle de la main droite vue en 1<sup>ère</sup> année : en mettant le pouce de la main droite suivant  $I$ , les 4 autres doigts s'enroulent suivant  $\vec{u}_\theta$ .

▷ On a invariance de la distribution de courant par **translation suivant Oz** et par **rotation autour de l'axe Oz**. D'où  $B(r, \theta, z)$  est indépendant de  $\theta$  et  $z$ . Finalement, on a  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

**Q5.** ▷ On applique le théorème d'Ampère avec comme contour un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  passant par  $M$  et orienté suivant  $+\vec{u}_\theta$  (voir figure ci-contre dans le plan contenant  $M$  et orthogonal à  $\vec{u}_z$ ).



▷ Calculons la circulation de  $\vec{B}$  suivant ce contour :  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r) dl$

Puisque  $r$  est constant sur le contour  $\mathcal{C}$ ,  $B(r)$  est constant sur le contour  $\mathcal{C}$  et on peut le sortir de l'intégrale curviligne. On a donc la circulation de  $\vec{B}$  qui vaut :  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_{\mathcal{C}} dl = B(r) \times 2\pi r$

▷ Avec l'orientation choisie, le courant enlacé par  $\mathcal{C}$  vaut  $I_{\text{enlacée par } \mathcal{C}} = I$

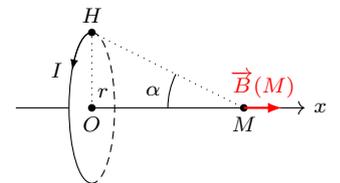
▷ Ainsi on obtient  $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$  et donc  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Et donc sous forme vectorielle pour répondre pleinement à la question :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  ( $r = R$  dans l'énoncé mais c'est un peu maladroit car lettres majuscules sont souvent constantes en physique)

**Q6.** ▷ Symétries de la distribution de courant : puisque  $M$  est sur l'axe de la spire, **tout plan contenant OM est plan d'antisymétrie de la distribution de courant**. Donc  $\vec{B}(M)$  **appartient à tous ces plans**. D'où,  $\vec{B}(M) = B(x) \vec{u}_x$

▷ *Remarque* :  $M$  étant sur l'axe  $Ox$ , sa position est caractérisé par la seule donnée de l'abscisse  $x$  ; il n'y a donc pas l'étude des invariances à réaliser. Pour les questions **Q4.** et **Q5.** on envisageait une position quelconque de  $M$  et il fallait donc faire l'étude des invariances.

▷ Ce résultat est cohérent avec la règle de la main droite vue en 1<sup>ère</sup> année : en mettant les quatre doigts de la main droite sauf le pouce suivant  $I$ , le pouce donne le sens global du champ magnétique :  $+\vec{u}_x$ . Concernant le sens de  $\vec{B}$  au point  $M$ , c'est cette règle qualitative qui permet de prédire le sens de  $\vec{B}$  (et non les symétries comme semble le suggérer l'énoncé).



▷ Finalement,  $\vec{B}(M)$  est de direction  $Ox$  et de sens  $+\vec{u}_x$  (si  $I > 0$  A évidemment). Ceci est résumé sur la figure ci-contre.

**Q7.** ▷ Exprimons  $\sin \alpha$  dans le triangle  $OMH$  ( $H$  est défini sur la figure que j'ai faite à la **Q6.**) :

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^{-1/2} \quad \text{et donc} \quad B(M) = B_0 \sin^3 \alpha = B_0 \frac{r^3}{(\sqrt{r^2 + x^2})^3} = B_0 \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^{-3/2}$$

▷ *Remarques* :

— l'expression faisant apparaître  $(1 + x^2/r^2)^{-3/2}$  n'était pas demandée mais elle permet de voir immédiatement le développement limité évoqué dans l'énoncé.

En effet, si  $x \ll r \Leftrightarrow \frac{x}{r} \ll 1$ , on peut faire un développement limité à l'ordre 1 selon la formule  $(1 + u)^\alpha \simeq 1 + \alpha u$  avec

$$\text{ici } u = \frac{x^2}{r^2} \ll 1 \text{ et } \alpha = -3/2. \text{ On a donc : } \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} \text{ si } x \ll r$$

— Le résultat donné dans l'énoncé  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \alpha$  ne peut pas se démontrer avec le théorème d'Ampère (c'est bien pour cela que l'énoncé donne ce résultat d'ailleurs). Pour établir cette expression on utilise généralement la loi de Biot et Savart (hors programme dans toutes les filières de CPGE).

— L'énoncé est un peu maladroit de noter le rayon de la spire  $r$  car cette notation est plutôt réservée aux coordonnées cylindriques habituellement. Il aurait mieux valu noter ce rayon  $R$  ou  $a...$  Rien de bien grave cependant.

**Q8.** ▷ On résout  $B_0 \left(1 - \frac{3x_{\text{max}}^2}{2r^2}\right) = 0,9B_0 \Leftrightarrow x_{\text{max}}^2 = r^2 \frac{0,2}{3}$ . En prenant  $x_{\text{max}} > 0$  on ne garde que la solution positive de

$$\text{sorte que } x_{\text{max}} = r \sqrt{\frac{2}{30}} \simeq 0,26r$$

▷ Ainsi,  $\boxed{\text{si } x \in [-x_{\max}, x_{\max}] \text{ alors } B \text{ est compris entre } 0,9B_0 \text{ et } B_0}$  et donc  $B$  diffère de moins de 10% de  $B_0$ .

▷ En réalité la valeur de  $x_{\max} = r\sqrt{\frac{2}{30}}$  est approchée car on a utilisé l'expression approchée de  $B$  pour l'établir. En utilisant l'expression exacte de  $B$  la question **Q7.**, on peut montrer que  $x_{\max} = r\sqrt{\frac{1}{0,9^{2/3}} - 1} \simeq 0,27r$  ce qui n'est pas très éloigné des  $0,26r$  obtenu précédemment.

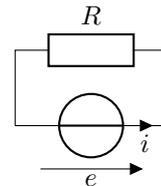
**Q9.** ▷ On utilise l'orientation de la **Figure 4** pour la spire (S) de sorte que le vecteur surface élémentaire de (S) s'exprime par  $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$

▷ Puisque le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme on a immédiatement :

$$\boxed{\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \pi r_2^2 \vec{u}_z = B_0 \cos(\omega t) \pi r_2^2}$$

**Q10.** ▷ D'après la loi de Faraday sur la spire :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \omega \sin(\omega t) \pi r_2^2$

**Q11.** ▷ On représente ci-contre le schéma électrique équivalent de la spire (S) en négligeant l'inductance propre. La f.é.m est prise en convention générateur avec  $i$  (indispensable).



▷ Via la loi des mailles et la loi d'Ohm :  $e = Ri$  et donc  $i = \frac{e}{R} = \frac{B_0 \omega}{R} \sin(\omega t) \pi r_2^2$

**Q12.** ▷ La puissance dissipée sous forme thermique par effet Joule dans le fond métallique de la casserole correspond à l'intégralité de la puissance électrique reçue par la résistance  $R$ . Donc  $P(t) = Ri^2 = R \frac{B_0^2 \omega^2}{R^2} \sin^2(\omega t) \pi^2 r_2^4 = \frac{B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t) \pi^2 r_2^4$

**Q13.** ▷ On sait que  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ ; d'où  $P_{\text{moy}} = \frac{B_0^2 \omega^2}{R} \langle \sin^2(\omega t) \rangle \pi^2 r_2^4 = \frac{B_0^2 \omega^2}{2R} \pi^2 r_2^4$  ce qui est bien identique au résultat demandé.

**Q14.** ▷ Il y a 3 modes de transfert thermique : conduction thermique (ou diffusion thermique), convection thermique et rayonnement thermique.

▷ Le corps métallique de la casserole est un solide opaque, dans ce cas, seul le transfert thermique par conduction est possible à l'intérieur du solide. À la surface du solide opaque les 3 modes de transfert thermique peuvent exister (conduction, convection, rayonnement).

▷ Le contenu de la casserole est souvent liquide, dans ce cas, on peut envisager les 3 modes de transfert thermique mais le mode majoritaire est probablement la convection.

▷ La réponse attendue est probablement la suivante : c'est grâce au phénomène de **diffusion thermique** que le contenu de la casserole reçoit une bonne partie de la puissance dissipée par effet Joule. Le contenu de la casserole ne reçoit pas l'intégralité de la puissance dissipée par effet Joule car l'air ambiant est aussi chauffé.

▷ *Remarque* : on pourrait aussi citer l'échange conducto-convectif de Newton qui se produit au niveau de la couche limite du liquide. À proximité de l'interface casserole-fluide, on a la transition entre un transfert thermique conductif (à proximité de la surface solide) et convectif (le transfert thermique convectif est de plus en plus important au fur et à mesure que l'on s'éloigne du solide et il finit par dominer le transfert conductif lorsque l'on sort de la couche limite) ~~~~~ voir le cours pour plus de détails.

**Q15.** ▷ La vitrocéramique n'est pas un très bon conducteur thermique contrairement aux métaux, elle ne va donc pas chauffer excessivement au contact d'une casserole chauffée par induction. Ainsi, lorsque l'on enlève une casserole d'une plaque à induction, la surface où était la casserole est bien moins chaude que lorsque l'on enlève une casserole d'une plaque électrique (j'appelle plaque électrique une plaque par laquelle le chauffage se fait directement par une résistance électrique).

**Il y a donc moins de risque de brûlure avec des plaques à induction qu'avec des plaques électriques.**

▷ Autre avantage des plaques à induction : si on éloigne la casserole des plaques, le phénomène d'induction va s'atténuer et les plaques vont même totalement arrêter de chauffer la casserole si on l'éloigne suffisamment loin (en pratique, une dizaine de centimètres suffisent à couper le chauffage par induction). Ce phénomène n'a pas lieu avec une plaque électrique classique : il y a donc un risque d'incendie plus élevé avec une plaque électrique classique.

**Q16.** ▷ L'ARQS peut-être considérée valable si  $r_1, r_2$  et  $z_0$  sont très petits devant la longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{f} \simeq \left( \frac{3 \times 10^8}{60 \times 10^3} \right) \text{ m} = 5 \text{ km}$ .

▷ Ainsi, en ordre de grandeur (ODG), **il faut que  $r_1, r_2$  et  $z_0$  soit plus petit que 0,5 km** pour que l'ARQS soit justifiée.

▷ On constate qu'en pratique, **l'ARQS pour un chauffage à induction domestique est toujours largement vérifiée.**

**Q17.** ▷ L'équation de la chaleur  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  n'est pas invariante par renversement du temps  $t \rightarrow -t$ . Cela justifie qualitativement l'irréversibilité du phénomène de diffusion thermique.

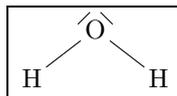
**Q18.** ▷ Passons l'équation de la chaleur en ODG :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  devient :  $\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \times \frac{1}{L^2}$  puisque l'on s'intéresse au temps caractéristique pour que la diffusion thermique s'établisse sur la longueur du manche de longueur  $L$ .

▷ On a donc 
$$\tau = \frac{\rho c}{\lambda} L^2 = \left( \frac{8 \times 10^3 \times 10^3}{16} \times 0,2^2 \right) \text{ s} \sim 2 \cdot 10^4 \text{ s} \simeq 6 \text{ h}$$

▷ Ce temps est long pour un usage domestique : quelques litres d'eau peuvent être amenés à ébullition et cuire les aliments que l'on souhaite en moins d'une heure. Cela n'est pas étonnant car le temps caractéristique de diffusion augmente avec la distance au carré : le phénomène de diffusion thermique n'est donc efficace qu'à de courtes échelles spatiales.

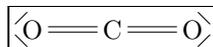
▷ Autre commentaire : puisque  $\tau \simeq 6 \text{ h}$ , on ne risque pas de se brûler en touchant le bout du manche de la poêle (celui le plus éloigné de la poêle). Par contre il ne faut pas toucher le côté proche de la poêle car si on prends  $L' = \frac{L}{10} = 2 \text{ cm}$ , le temps caractéristique de diffusion sera de  $\tau' \simeq 2 \cdot 10^2 \text{ s} \simeq 3 \text{ min}$  ce qui permet d'envisager la brûlure !

**Q19.** ▷ Pour l'eau  $\text{H}_2\text{O}$ , la structure de Lewis doit avoir  $2 \times 1 + 6 = 8e^-$  de valence soit 4 doublets. H respecte la règle du duet et O la règle de l'octet, on propose donc la structure suivante :



▷ *Remarque* :  $\text{H} - \overline{\text{O}} - \text{H}$  est aussi acceptable car dans une structure de Lewis on ne respecte pas nécessairement la géométrie.

▷ Pour le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$ , la structure de Lewis doit avoir  $4 + 6 \times 2 = 16e^-$  de valence soit 8 doublets. O et C respectent la règle de l'octet, on propose donc la structure suivante :



**Q20.** ▷ La méthode VSEPR permettant de prévoir la géométrie des molécules n'étant plus au programme il faut répondre autrement...

▷ Dans  $\text{H}_2\text{O}$ , l'élément central O possède 2 doublets non liants. Ces deux doublets non liants vont créer des forces électrostatiques répulsives entre eux mais aussi sur les doublets liants. **La molécule d'eau est donc coude pour qu'il y ait le moins de répulsion possible entre les 4 doublets de l'oxygène** (plus précisément, ce coude permet de minimiser l'énergie potentielle électrostatique de la molécule d'eau afin d'avoir un équilibre stable).

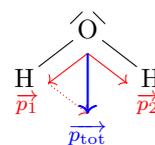
▷ *Remarque* : Si les 4 doublets de l'oxygène étaient équivalents, on pourrait montrer que l'angle qui minimiserait la répulsion électrostatique serait de  $109,28^\circ \dots$  Mais en réalité, les 2 doublets non liants sont plus répulsifs que les 2 doublets liants (c'est bien connu des chimistes) ; l'angle entre les 2 doublets liants est donc inférieur à  $109,28^\circ$  ; il vaut  $104,5^\circ$ .

▷ Pour  $\text{CO}_2$  c'est plus facile : l'élément central C ne possède pas de doublets non liants. **Pour minimiser la répulsion électrostatique dans  $\text{CO}_2$ , il faut que la molécule soit linéaire afin que les 2 liaisons doubles du carbone soient le plus éloignées possibles.**

**Q21.** ▷ O étant plus électronégatif que H les 2 liaisons OH sont polarisées.

Plus précisément, O attire un peu plus les électrons que H. Il apparaît donc une charge partielle  $+\delta \times e$  sur chacun des atomes H et une charge partielle  $-2\delta \times e$  sur O ( $\delta \in ]0, 1[$  est le pourcentage de ionicité de la liaison OH).

▷ Il apparaît donc deux moments dipolaires  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  qui pointent vers les H (voir figure ci-contre). **La molécule d'eau est donc polaire**, son moment dipolaire vaut  $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  (voir figure ci-contre).



▷ La molécule d'eau étant symétrique par rapport au plan  $\Pi$  sur la figure ci-contre (plan orthogonal à la feuille et contenant la bissectrice de l'angle HOH), le moment dipolaire  $\vec{p}_{\text{tot}}$  est contenu dans ce plan (c'est évident puisque  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  sont de même norme).

**Q22.** ▷ Afin de comparer les températures d'ébullition de 2 corps purs, **il faut comparer les énergies des liaisons intermoléculaires des 2 corps purs** (les liaisons pouvant exister entre les molécules de corps purs).

Le corps pur à l'état liquide qui a les liaisons intermoléculaires les plus fortes nécessitera un apport d'énergie (sous forme thermique) plus important et aura donc une température d'ébullition plus élevée. Il nous faut donc comparer les ordres de grandeur des énergies de liaisons de  $\text{CO}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$ .

▷ *Remarque* : on rappelle que les liaisons intermoléculaires sont les liaisons de van der Waals et qu'elles se séparent en 3 types d'interactions :

- les interactions de Keesom qui n'existent qu'entre 2 molécules polaires.
- les interactions de Debye qui existent entre : (i) 2 molécules polaires ou (ii) entre 1 molécule polaire et 1 molécule polarisable (une molécule polarisable est une molécule apolaire mais qui peut devenir polaire sous l'effet du champ électrique créé par une molécule polaire située à proximité).
- les interactions de London qui existent tout le temps peu importe les molécules en interactions.

▷  $\text{CO}_2$  étant **une molécule apolaire** par symétrie, sa cohésion à l'état liquide est assurée par des **liaisons intermoléculaires de van der Waals** (plus précisément seules les forces de London vont pouvoir assurer la cohésion de  $\text{CO}_{2(l)}$  car les forces de Debye et Keesom ne vont pas pouvoir exister pour  $\text{CO}_2$  pur). On sait que les liaisons de van der Waals sont caractérisées par des **énergies de l'ordre de  $E_{\text{vdW}} \sim$  quelques kJ/mol.**

▷ Inversement, H<sub>2</sub>O est une **molécule fortement polaire**. Sa cohésion à l'état liquide est assuré par les liaisons de van der Waals et en particulier par **les forces de Keesom que l'on appelle liaisons hydrogènes dans le cas de l'eau** (et dans le cas de certains autres composés fortement polaire faisant apparaître des atomes d'hydrogène comme HCl).

Les liaisons hydrogène sont donc un cas particulier de liaisons de van der Waals mais elles ont la propriété d'avoir des énergies de liaisons beaucoup plus élevées : les liaisons hydrogènes sont caractérisées par des **énergies de l'ordre de E<sub>liaison H</sub> ~ quelques dizaines de kJ/mol**

▷ Ainsi,  $E_{\text{liaisons inter-moléculaires H}_2\text{O}} = E_{\text{liaison H}} \sim 10^1 \text{ kJ/mol} > E_{\text{liaisons inter-moléculaires CO}_2} = E_{\text{vdW}} \sim 10^0 \text{ kJ/mol}$  et donc  $T_{\text{éb,H}_2\text{O}} > T_{\text{éb,CO}_2}$

▷ *Remarques :*

— en effet, sous 1 bar on trouve  $T_{\text{éb,H}_2\text{O}} = 100^\circ\text{C} > T_{\text{éb,CO}_2} = -56,6^\circ\text{C}$

— pour les mêmes raisons qu'évoquées juste au dessus, on a aussi  $T_{\text{fus,H}_2\text{O}} > T_{\text{fus,CO}_2}$

**Q23.** ▷ D'après la loi de Hess :  $\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ_{\text{CO}_2(\text{aq})} - \Delta_f H^\circ_{\text{CO}_2(\text{g})} = -20,3 \text{ kJ/mol}$

▷ Puisque  $\Delta_r H^\circ < 0 \text{ kJ/mol}$ , **la réaction est exothermique** (en sens direct). Cette réaction libère donc un transfert thermique (si elle est réalisée en sens direct évidemment).

**Q24.** ▷ Réponse 1 : D'après la loi de modération de Le Châtelier, **une augmentation isobare de température déplace l'équilibre dans le sens endothermique**.

D'après la question précédente,  $\Delta_r H^\circ < 0 \text{ kJ/mol}$  donc la réaction est exothermique dans le sens direct et endothermique dans le sens indirect.

Ainsi **l'augmentation de température à pression constante déplace l'équilibre en sens indirect ←**

▷ Réponse 2 : D'après la loi de Van't Hoff,  $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$

Puisque  $\Delta_r H^\circ < 0 \text{ kJ/mol}$ , on a  $\frac{d \ln K^\circ}{dT} < 0$  et donc  $\ln K^\circ$  décroît avec  $T$ . Comme la fonction  $\ln$  est croissante cela signifie que  **$K^\circ$  décroît avec  $T$**

Ainsi, si  $T$  augmente,  $K^\circ$  diminue et donc l'équilibre est déplacé en sens indirect ←

**Q25.** ▷ D'après le **Tableau 1**, la solubilité augmente si la température diminue. Or la solubilité de CO<sub>2(g)</sub> est d'autant plus élevée que la réaction (1) est déplacée en sens direct.

▷ Ainsi, l'équilibre (1) est d'autant plus déplacé en sens direct que la température diminue. Inversement, **l'équilibre (1) est d'autant plus déplacé en sens indirect que la température augmente**. Cela correspond bien à la conclusion de la question **Q24**.

**Q26.** ▷ On a  $Q_r = \frac{a_{\text{CO}_2(\text{aq}),\text{éq}}}{a_{\text{CO}_2(\text{g}),\text{éq}}} = \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \times \frac{p^\circ}{p_{\text{CO}_2}}$  avec  $[\text{CO}_2(\text{aq})]$  la concentration en CO<sub>2(aq)</sub> à l'équilibre,  $C^\circ = 1 \text{ mol/L}$

la concentration standard,  $p_{\text{CO}_2}$  la pression partielle en CO<sub>2</sub> à l'équilibre et  $p^\circ = 1 \text{ bar}$  la pression standard.

▷ *Remarque :* l'expression des activités est valable dans l'hypothèse des solutions idéales (toujours le cas en TSI sauf indication contraire de l'énoncé).

**Q27.** ▷ Réponse 1 : Envisageons un état initialement à l'équilibre de la question **Q26.** :  $Q_{r,i} = K^\circ(T)$  avec  $K^\circ(T)$  la constante de l'équilibre (1) qui ne dépend que de la température  $T$ .

D'après l'expression de la **Q26.**, on constate que si on augmente la pression partielle en CO<sub>2</sub> sans changer  $T$ , alors,  $Q_r$  diminue alors que  $K^\circ(T)$  est inchangée (puisque  $T$  est inchangée).

Pour retourner à l'équilibre,  $Q_r$  doit augmenter pour ré-atteindre  $K^\circ(T)$ ; or pour que  $Q_r$  augmente il faut que l'équilibre soit déplacé en sens direct →.

Ainsi, **l'augmentation isotherme de la pression partielle en CO<sub>2</sub> déplace l'équilibre en sens direct →.**

▷ Réponse 2 : CO<sub>2</sub> étant le seul gaz, la pression partielle de CO<sub>2</sub> se confond avec la pression totale. Or, d'après la loi de modération de Le Châtelier, **une augmentation isotherme de pression déplace l'équilibre dans le sens diminuant la quantité de matière de gaz.**

Ici le seul gaz est du côté des réactifs donc augmenter  $p_{\text{CO}_2}$  déplace l'équilibre dans le sens direct →.

▷ *Remarque :* ainsi, la solubilité de CO<sub>2(g)</sub> augmente avec la pression. Ceci est assez intuitif et cela explique pourquoi une bouteille de champagne sous pression dégage des bulles de gaz lorsqu'on l'ouvre. En effet, à l'ouverture de la bouteille, la pression  $p_{\text{CO}_2}$  chute brusquement et donc la solubilité de CO<sub>2</sub> diminue fortement. Le CO<sub>2</sub> dissous repasse à l'état gazeux ce qui crée les bulles de champagne (ou des boissons gazeuses).

**Q28.** ▷  $\mu_{\text{CO}_2(\text{g})} = \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ + RT \ln a_{\text{CO}_2(\text{g})} = \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ + RT \ln \left( \frac{p_{\text{CO}_2}}{p^\circ} \right)$

$$\text{Q29. } \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})} = \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ + RT \ln a_{\text{CO}_2(\text{aq})} = \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ + RT \ln \left( \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \right)$$

Q30. ▷ D'après l'énoncé, à l'équilibre sous  $P$  et  $T$  fixées, on a égalité des 2 potentiels chimiques exprimés aux 2 questions précédentes :  $\mu_{\text{CO}_2(\text{g}),\text{éq}} = \mu_{\text{CO}_2(\text{aq}),\text{éq}} \Leftrightarrow \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ + RT \ln \left( \frac{p_{\text{CO}_2,\text{éq}}}{p^\circ} \right) = \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ + RT \ln \left( \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]_{\text{éq}}}{C^\circ} \right)$

En notant  $p_{\text{CO}_2,\text{éq}} = p_{\text{CO}_2}$  la pression partielle en  $\text{CO}_2$  à l'équilibre et  $[\text{CO}_2(\text{aq})]_{\text{éq}} = [\text{CO}_2(\text{aq})]$  la concentration en  $\text{CO}_2(\text{aq})$  à l'équilibre (c'est ce que demande implicitement de faire l'énoncé) cela devient :

$$RT \ln \left( \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \times \frac{p^\circ}{p_{\text{CO}_2}} \right) = \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ - \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ \text{ soit } \ln \left( \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \times \frac{p^\circ}{p_{\text{CO}_2}} \right) = \frac{\mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ - \mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ}{RT}$$

Et donc en prenant l'exponentielle dans la dernière équation on obtient :  $\frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \times \frac{p^\circ}{p_{\text{CO}_2}} = \exp \left( -\frac{\mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ - \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ}{RT} \right)$

▷ On a donc bien  $[\text{CO}_2(\text{aq})] = k \times p_{\text{CO}_2}$  avec  $k = \frac{C^\circ}{p^\circ} \exp \left( -\frac{\mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ - \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ}{RT} \right)$

▷ *Remarques :*

—  $k$  peut donc bien s'exprimer en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{bar}^{-1}$

— L'énoncé ne demandait pas d'aller plus loin mais il est quand même important de reconnaître sur cette expression la loi d'action des masses vue en 1<sup>ère</sup> année.

En effet,  $\mu_{\text{CO}_2(\text{aq})}^\circ - \mu_{\text{CO}_2(\text{g})}^\circ = \Delta_r G^\circ$  est l'enthalpie libre standard de la réaction (1) (pensez à la formule  $\Delta_r G^\circ = \sum \nu_i \mu_i^\circ$ )

et on sait que  $\exp \left( -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT} \right) = K^\circ$  avec  $K^\circ$  la constante d'équilibre de la réaction (1).

Grâce à ces deux formules de thermochimie de 2<sup>ème</sup> année, on retrouve donc bien la loi d'action des masses pour la réaction (1) :  $K^\circ = Q_{r,\text{éq}} = \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]}{C^\circ} \times \frac{p^\circ}{p_{\text{CO}_2}}$ .

On a donc aussi  $k = \frac{C^\circ}{p^\circ} K^\circ$

— La constante  $k$  de l'énoncé ne dépend effectivement que de  $T$  puisque  $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$  ne dépend que de  $T$

Q31. ▷ D'après la question précédente,  $[\text{CO}_2(\text{aq})] = k \times p_{\text{CO}_2} = 0,025 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{bar}^{-1} \times 4 \text{ bar} = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Q32. ▷ D'après la question Q31., si la pression partielle en  $\text{CO}_2$  dans la bouteille d'eau est égale à 4 bar alors la concentration en  $\text{CO}_2$  dissous est de  $[\text{CO}_2(\text{aq})] = 0,10 \text{ mol/L}$ . Dans  $V = 1,0 \text{ L}$  de cette eau il y a donc  $n_{\text{CO}_2(\text{aq})} = [\text{CO}_2(\text{aq})] \times V = 0,10 \text{ mol}$  de  $\text{CO}_2$  dissous.

La masse de  $\text{CO}_2$  dissous est donc de  $m_{\text{CO}_2(\text{aq})} = n_{\text{CO}_2(\text{aq})} \times M_{\text{CO}_2} = [\text{CO}_2(\text{aq})] \times V \times M_{\text{CO}_2} = (0,1 \times 44) \text{ g} = 4,4 \text{ g}$

▷ *Remarque :* Pour calculer la masse de  $\text{CO}_2(\text{g})$  qui est gazeuse dans la bouteille, il faudrait connaître le volume de gaz (dans une bouteille, il y a toujours un peu de gaz au dessus du liquide).

Typiquement on peut imaginer avoir  $V_{\text{gaz}} \simeq 10 \text{ mL}$  de gaz au dessus de l'eau dans une bouteille d'eau gazeuse classique. Puisque  $p_{\text{CO}_2} = 4 \text{ bar} < 10 \text{ bar}$ , le modèle du GP peut encore s'appliquer avec une bonne précision.

On a donc :  $p_{\text{CO}_2} \times V_{\text{gaz}} = n_{\text{CO}_2(\text{g})} RT$  et donc  $m_{\text{CO}_2(\text{g})} = n_{\text{CO}_2(\text{g})} \times M_{\text{CO}_2} = \frac{p_{\text{CO}_2} \times V_{\text{gaz}}}{RT} \times M_{\text{CO}_2} \simeq 0,071 \text{ g}$ .

Si  $V_{\text{gaz}} = 1,0 \text{ L}$  alors on aurait  $m_{\text{CO}_2(\text{g})} = 7,1 \text{ g}$ . Ainsi en pratique, c'est parce  $V_{\text{gaz}} \ll V_{\text{liq}}$  que l'on a  $m_{\text{CO}_2(\text{g})} \ll m_{\text{CO}_2(\text{aq})}$

Q33. ▷ Construisons le tableau d'avancement en mol/L de la réaction (2) en négligeant l'autoprotolyse de l'eau :

|    |                          |   |                                 |   |                             |   |                                   |
|----|--------------------------|---|---------------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------------|
|    | $\text{CO}_2(\text{aq})$ | + | $2\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ | = | $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ | + | $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ |
| EI | 0,1                      |   | excès                           |   | 0                           |   | 0                                 |
| EF | $0,1 - x_f$              |   | excès                           |   | $x_f$                       |   | $x_f$                             |

On écrit la loi d'action des masses (notée LAM) de cette réaction :  $K_2^\circ = \frac{x_f^2}{0,1 - x_f}$  (comme le font souvent les chimistes, j'omets les  $C^\circ$  en exprimant toutes les concentrations en mol/L).

▷ Puisque la calculatrice n'est pas autorisée (et même si elle avait été autorisée) on réalise une hypothèse : puisque  $K_2^\circ = 10^{-6,4} \ll 10^{-4}$  on fait l'hypothèse que la réaction (2) est très peu déplacée dans le sens direct :  $0,1 - x_f \simeq 0,1$ .

La LAM se résout alors très simplement :  $K_2^\circ = \frac{x_f^2}{0,1 - x_f} \simeq \frac{x_f^2}{0,1} \Rightarrow x_f \simeq \sqrt{0,1 K_2^\circ} = \sqrt{10^{-7,4}} = 10^{-3,7}$

▷ Avant de calculer le pH, vérifions l'hypothèse de réaction très peu déplacée.

Réponse 1 : on a  $x_f = 10^{-3,7} \ll 0,1 \text{ mol/L}$  donc l'hypothèse est validée.

Réponse 2 : on calcule le taux d'avancement :  $\tau = x_f/x_{\text{max}} = 10^{-3,7}/0,1 = 10^{-2,7}$  : le taux d'avancement est inférieur à 1%

donc l'hypothèse est validée.

▷ Finalement on calcule  $\boxed{\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log x_f = 3,7}$ . On a bien  $\text{pH} < 6,5$  donc l'autoprotolyse de l'eau pouvait être négligée.

**Q34.** ▷ Puisque le thé pétillant est assimilable à de l'eau liquide (même masse volumique et même capacité thermique massique), je confonds l'eau liquide et le thé pétillant afin de gagner un peu de place. Je note  $m_{\text{liq}}$  et  $c_{\text{liq}}$  la masse et la capacité thermique massique de l'eau liquide.

▷ Soit le système thermodynamique {eau + glaçon + thermos} sur lequel on va appliquer le 1<sup>er</sup> de la thermodynamique.

▷ On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige la capacité thermique du thermos devant celle de l'eau et du glaçon. Ce n'est probablement pas une très bonne approximation mais on se doit de la faire pour répondre à la question.
- on suppose que la transformation subit par le système est adiabatique. Cela est une très bonne approximation dans le cas d'un thermos sur des durées inférieures à quelques minutes.
- on suppose que le système subit une transformation isobare.

On est alors ramené à un exercice de calorimétrie dans lequel on ne prend pas en compte la valeur en eau du calorimètre (en effet, on néglige la capacité thermique du thermos).

▷ Appliquons le 1<sup>er</sup> principe isobare sur le système {eau + glaçon + thermos} :  $\Delta H = Q + W_{\text{autres}}$  avec  $Q = 0$  car la transformation est supposée adiabatique et  $W_{\text{autres}} = 0$  car il n'y a pas de travail autre que celui des forces pressantes (pas de résistance chauffante par exemple). On a donc  $\boxed{\Delta H = 0}$

▷ Par extensivité de l'enthalpie, on a  $\Delta H = \Delta H_{\text{glaçon}} + \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{thermos}}$  et comme on néglige la capacité thermique du thermos, on a  $|\Delta H_{\text{thermos}}| = m_{\text{thermos}}c_{\text{thermos}}|T_f - T_{\text{thermos,ini}}| \ll |\Delta H_{\text{eau}}|$  et  $|\Delta H_{\text{glaçon}}|$

▷ Concernant les températures, on note :

- $T_i = -15^\circ\text{C}$  la température initiale du glaçon
- $T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$  la température de fusion de la glace sous pression atmosphérique
- $T_1 = 20^\circ\text{C}$  la température initiale du thé pétillant
- $T_f = 10^\circ\text{C}$  la température du mélange à l'état final

▷ Avec les hypothèses et les notations précédentes on a :  $\Delta H = \Delta H_{\text{glaçon}} + \Delta H_{\text{eau}} = 0$  avec :

$$\Delta H_{\text{glaçon}} = \underbrace{m_g c_g (T_{\text{fus}} - T_i)}_{\substack{\text{Échauffement du glaçon} \\ \text{de } T_i = -15^\circ\text{C} \text{ à } T_{\text{fus}}}} + \underbrace{m_g L_{\text{fus}}}_{\text{Fonte du glaçon}} + \underbrace{m_g c_{\text{liq}} (T_f - T_{\text{fus}})}_{\substack{\text{Échauffement du glaçon fondu} \\ \text{de } T_{\text{fus}} \text{ à } T_f = 10^\circ\text{C}}} \quad \text{et} \quad \Delta H_{\text{eau}} = \underbrace{m_{\text{liq}} c_{\text{liq}} (T_f - T_1)}_{\substack{\text{Refroidissement de l'eau} \\ \text{de } T_1 = 20^\circ\text{C} \text{ à } T_f = 10^\circ\text{C}}}$$

▷ Ainsi, on a  $m_g c_g (T_{\text{fus}} - T_i) + m_g L_{\text{fus}} + m_g c_{\text{liq}} (T_f - T_{\text{fus}}) + m_{\text{liq}} c_{\text{liq}} (T_f - T_1) = 0$  et en isolant  $m_g$  on obtient :

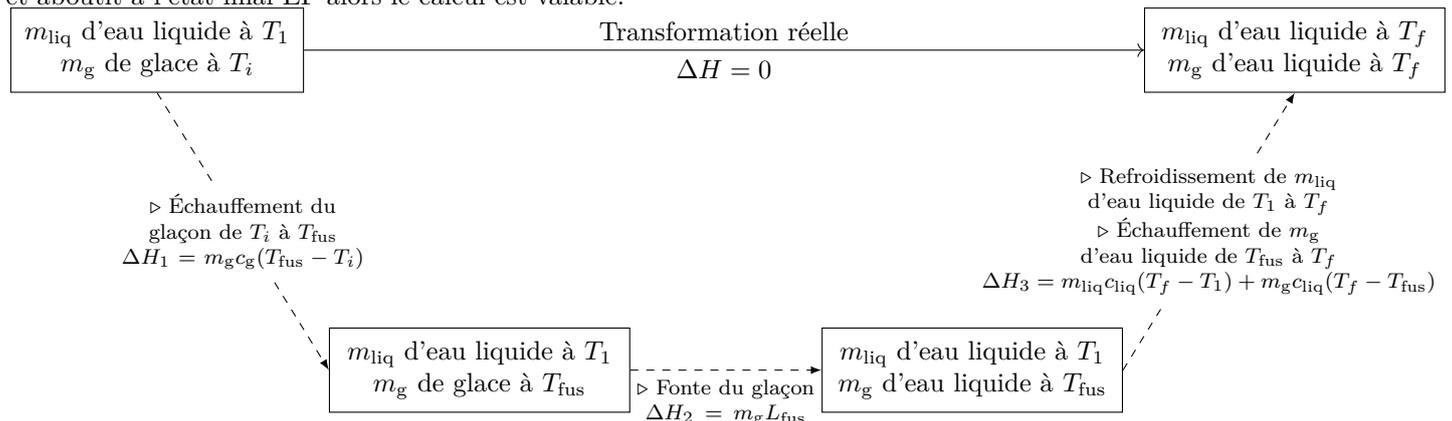
$$\boxed{m_g = \frac{m_{\text{liq}} c_{\text{liq}} (T_1 - T_f)}{c_g (T_{\text{fus}} - T_i) + L_{\text{fus}} + c_{\text{liq}} (T_f - T_{\text{fus}})} = 100 \text{ g} = 0,10 \text{ kg}}$$

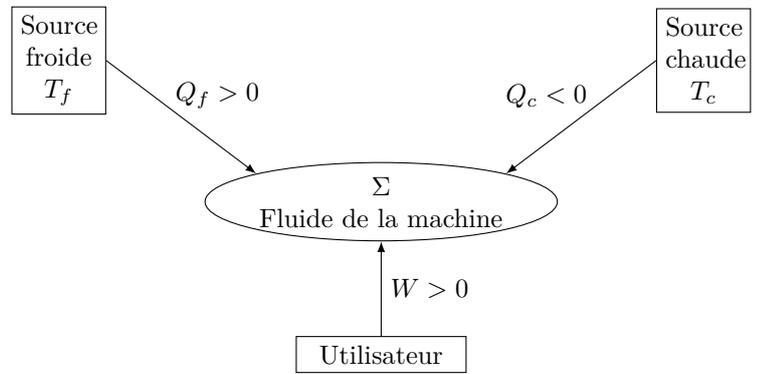
▷ Les glaçons de l'énoncé faisant 10 g, **il faut donc 10 glaçons pour obtenir le thé glacé pétillant dans le thermos.** C'est raisonnable pour refroidir un litre de thé pétillant.

▷ C'est la fonte du glaçon qui contribue le plus au refroidissement du thé pétillant puisque  $L_{\text{fus}} = 330 \text{ kJ/kg} \gg c_g (T_{\text{fus}} - T_i) = 30 \text{ kJ/kg}$  et  $c_{\text{liq}} (T_f - T_{\text{fus}}) = 40 \text{ kJ/kg}$ . C'est pourquoi les « glaçons » en granit sont bien moins efficaces que les glaçons en eau pour refroidir les liquides : à masse égale, un « glaçon » en granit ne changera pas d'état et il refroidira donc beaucoup moins que des glaçons en eau. Par contre l'eau de fonte peut venir diluer les boissons (Whisky par exemple) ce qui n'est pas toujours souhaitable...

▷ *Remarque :* Pour traiter ce genre d'exercice, il peut parfois être utile de représenter une suite de transformations fictives permettant de passer de l'état initial à l'état final (voir figure ci-dessous).

Le fait que dans la réalité le système ne suive pas la suite de transformations fictives n'a pas de conséquence sur le calcul puisque seul  $\Delta H = H_{\text{EF}} - H_{\text{EI}}$  est important. Ainsi dès lors que la suite de transformations fictives part de l'état initial EI et aboutit à l'état final EF alors le calcul est valable.





**Q35.** ▷ On rappelle sur la figure ci-contre le schéma des échanges énergétiques d'une pompe à chaleur. Les flèches noires représentent le sens des échanges du point de vu du système  $\Sigma$ . Ainsi, puisque  $Q_f$  et  $W$  sont  $> 0$ , le sens réel de ces échanges correspond aux 2 flèches noires. Inversement, puisque  $Q_c < 0$ , le transfert thermique est en réalité cédé de  $\Sigma$  à la source chaude ; il a donc lieu dans le sens contraire de la flèche noire.

▷ Justifions les 3 signes :

- $Q_f > 0$  car  $\Sigma$  **prélève un transfert thermique à la source froide** (qui est l'intérieur du réfrigérateur) **pour la maintenir froide**. C'est ce transfert thermique qui est utile. Ce transfert est réalisé dans l'évaporateur ce qui est cohérent avec le signe de  $Q_f$  ; en effet pour que  $\Sigma$  puisse se vaporiser, il doit prélever un transfert thermique (un système doit recevoir un transfert thermique pour pouvoir se vaporiser ~~~~~ logique si vous pensez à l'eau d'une casserole qu'on laisse sur une plaque chauffante).
- $W > 0$  car l'utilisateur doit apporter un travail pour faire circuler le fluide dans les tuyaux de la machine. En pratique l'utilisateur n'apporte pas ce travail en pédalant sur un vélo ou en pompant manuellement (bien que ça pourrait marcher) ; ce travail est apporté dans le compresseur sous forme mécanique. Plus précisément, le compresseur reçoit un travail électrique qu'il transmet quasi-intégralement au fluide sous forme mécanique.
- $Q_c < 0$  car  $\Sigma$  **cède un transfert thermique à la source chaude** (qui est l'air extérieur de la pièce où est le frigo). Ce transfert thermique n'est pas utile pour un frigo, il contribue à maintenir chaud la source chaude. Ce transfert est réalisé dans le condenseur ce qui est cohérent avec le signe de  $Q_c$  ; en effet pour que  $\Sigma$  puisse se liquéfier, il doit céder un transfert thermique (un système doit céder un transfert thermique pour pouvoir se liquéfier ~~~~~ logique car pour qu'un système passe d'un état gazeux à liquide, il faut intuitivement le refroidir et cela nécessite que le système cède un transfert thermique).

▷ *Remarque* : on rappelle que dans le cadre des machines thermiques il y a deux abus de langage.

- Dans le condenseur il ne se produit pas une condensation mais une liquéfaction. En physique, le terme condensation correspond au changement d'état  $G \rightarrow S$  (inverse de la sublimation  $S \rightarrow G$ ). En français, le terme condensation fait référence au changement d'état  $G \rightarrow L$  mais il faudrait l'appeler « condensation liquide » ou mieux avec son vrai nom : la liquéfaction.
- Dans l'évaporateur il ne se produit pas une évaporation mais une vaporisation. L'évaporation est le passage d'un liquide de l'état liquide à l'état gazeux à sa surface, à une température inférieure à la température d'ébullition (imaginez une flaque d'eau sur un sol imperméable : elle va bien finir par disparaître car elle va s'évaporer). L'évaporation est donc un phénomène de surface dans lequel l'eau change de phase mais ça n'est pas un changement d'état à proprement parler comme l'est la vaporisation. Juste au dessus de la surface d'une flaque d'eau qui s'évapore, la pression partielle de  $H_2O_{(g)}$  est égale à la pression de vapeur saturante :  $P_{\text{sat}}(T)$ .

**Q36.** ▷ D'après la question précédente, la **source froide** est **l'intérieur du frigo** tandis que la **source chaude** est **l'air de la pièce où est situé le frigo**.

**Q37.** ▷ D'après la question **Q35.**, le fluide frigorigère doit céder un transfert thermique à la source chaude pour se refroidir et se liquéfier dans le condenseur. Le transfert thermique se faisant naturellement du chaud vers le froid, **le fluide frigorigère dans le condenseur est à plus haute température que l'air extérieur**.

On en déduit avec les notations qui sont introduites juste après que  $T_2 > T_3 > T_{\text{air}}$ .

▷ *Remarques* :

- ce transfert thermique entre le fluide frigorigère et l'air de la pièce se fait dans un échangeur thermique simple flux visible à l'arrière du frigo (le serpentin). Ce transfert thermique se fait par conduction dans le métal du serpentin et par convection naturelle à l'interface métal-air (lire la correction de la question **Q14.** pour plus de précisions).
- si le serpentin est suffisamment long,  $T_3 \rightarrow T_{\text{air}}$ . Mais s'il n'est pas assez long, on peut très bien avoir  $T_3 > T_{\text{air}}$ .
- L'évolution de la température du fluide frigorigère dans le serpentin  $T(s)$  est caractérisée par une équation différentielle que l'on obtient en appliquant le 1<sup>er</sup> principe en système ouvert sur une tranche de tuyau  $[x, x+dx]$ . Lors du changement d'état, le même raisonnement donne une ED sur la masse liquéfiée.

**Q38.** On réalise une suite de lecture graphique :

a) ▷  $P_e \simeq 0,85 \text{ bar}$  (lu sur l'isobare  $4 \rightarrow 1$ ) et  $P_c \simeq 10 \text{ bar}$  (lu sur l'isobare  $2 \rightarrow 3$ ).

b) ▷ Méthode 1 : avec les iso-titres en vapeur :  $x_v \simeq 36\%$  (il fallait utiliser cette méthode car c'est la plus rapide sans calculatrice).

Méthode 2 : avec le théorème des moments :  $x_v = \frac{LM}{LV}$  ( $L$  : liquide saturant à  $T_4$ ,  $G$  : vapeur saturante à  $T_4$  et  $M$  : mélange liquide-vapeur à  $T_4$ ). Puisque l'axe des abscisses est donné en échelle linéaire, on peut faire la mesure à la règle :  $x_v = \frac{3,5\text{cm}}{9,5\text{cm}} \simeq 37\%$ . On peut aussi lire les abscisses des enthalpies massiques :  $x_v = \frac{h_M - h_L}{h_V - h_L} = \frac{(240 - 165)}{(380 - 165)} \simeq 35\%$  (un peu moins précis que la règle).

c)  $\triangleright T_2 = 60^\circ\text{C}$  (le point 2 est pile sur l'isotherme  $60^\circ\text{C}$ ).

$\triangleright$  Remarque : le cycle de la **Figure 7** devrait être orienté dans le sens direct (sens trigonométrique) ; c'est un oubli de l'énoncé.

**Q39.** Pour un fluide  $\Sigma$  en écoulement stationnaire entre une entrée  $e$  et une sortie  $s$ , le 1<sup>er</sup> principe en système ouvert s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q \text{ avec } \begin{cases} \Delta h = h_s - h_e & : \text{ variation d'enthalpie massique entre } e \text{ et } s \\ \Delta e_c = e_{c,s} - e_{c,e} & : \text{ variation d'énergie cinétique massique entre } e \text{ et } s \\ \Delta e_p = e_{p,s} - e_{p,e} & : \text{ variation d'énergie potentielle massique entre } e \text{ et } s \\ w_i & : \text{ travail indiqué massique algébriquement reçu par } \Sigma \\ q & : \text{ transfert thermique massique algébriquement reçu par } \Sigma \end{cases}$$

$\triangleright$  Remarques :

- Sous cette forme, toutes les grandeurs sont massiques et s'expriment donc en J/kg
- Le 1<sup>er</sup> principe en système ouvert peut aussi s'écrire en terme de puissance sous la forme suivante :  $D_m \times (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_i + P_{th}$  avec  $D_m$  la débit massique,  $P_i = D_m \times q$  la puissance indiquée algébriquement reçue par  $\Sigma$  et  $P_{th} = D_m \times w_i$  la puissance thermique algébriquement reçue par  $\Sigma$ .
- Le travail indiqué massique s'appelle aussi le travail utile ; c'est le travail autre que celui des forces pressantes.
- Ce principe se démontre en appliquant le 1<sup>er</sup> principe (en système fermé donc  $\sim\sim\sim$  voir cours de 1<sup>ère</sup> année). L'astuce pour définir un système fermé dans le cas d'un fluide en écoulement consiste à suivre le fluide lors de son écoulement ; on a donc le système fermé qui est mobile (voir cours de 2<sup>ème</sup> année).

**Q40.**  $\triangleright$  Négliger les variations d'altitude et de vitesse du fluide revient à négliger  $|\Delta e_c|$  et  $|\Delta e_p|$  devant  $|\Delta h|$ . L'écriture du 1<sup>er</sup> principe en système ouvert est alors simplifiée sous la forme :  $\Delta h = w_i + q$

$\triangleright$  1<sup>er</sup> principe en système ouvert sur le fluide frigorigère en écoulement stationnaire dans l'évaporateur entre les points 4 et 1 :  $\Delta h_{41} = w_{i,41} + q_{41} = q_f$ . En effet, comme il n'y a pas de pièce mobile dans l'évaporateur, on a  $w_{i,41} = 0$ .

D'où,  $q_f = \Delta h_{41} = h_1 - h_4 \simeq (390 - 240)\text{kJ/kg} = 150 \text{ kJ/kg}$

$\triangleright$  1<sup>er</sup> principe en système ouvert sur le fluide frigorigère en écoulement stationnaire dans le condenseur entre les points 2 et 3 :  $\Delta h_{23} = w_{i,23} + q_{23} = q_c$ . En effet, comme il n'y a pas de pièce mobile dans le condenseur, on a  $w_{i,23} = 0$ .

D'où,  $q_c = \Delta h_{23} = h_3 - h_2 \simeq (240 - 440)\text{kJ/kg} = -200 \text{ kJ/kg}$

$\triangleright$  1<sup>er</sup> principe en système ouvert sur le fluide frigorigère en écoulement stationnaire dans le compresseur entre les points 1 et 2 :  $\Delta h_{12} = w_{i,12} + q_{12} = w$ . En effet, puisque la compression est considérée comme adiabatique dans le compresseur, on a  $q_{12} = 0$ .

D'où,  $w = \Delta h_{12} = h_2 - h_1 \simeq (440 - 390)\text{kJ/kg} = 50 \text{ kJ/kg}$

Remarques :

- Les signes des 3 grandeurs déterminés ici sont cohérents avec la question **Q35**.
- On remarque que  $w + q_c + q_f = 0$  : c'est cohérent avec l'écriture du 1<sup>er</sup> principe sur un cycle de la machine frigorigère :  $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$
- Pour un frigo de hauteur 2 m, on a  $|\Delta e_p| = |\Delta gz| \leq 20 \text{ J/kg} = 0,02 \text{ J/kg}$  ce qui permet de se rendre compte que négliger  $|\Delta e_p|$  devant  $|\Delta h|$  est une excellente approximation dans le cas d'un réfrigérateur. Similairement, avec des mesures de vitesse, on pourrait montrer que négliger  $|\Delta e_c|$  devant  $|\Delta h|$  est également une excellente approximation dans le cas d'un réfrigérateur domestique.

**Q41.**  $\triangleright$  Par définition,  $e_1 = \frac{\text{Grandeur utile}}{\text{Grandeur couteuse}} = \frac{|q_f|}{|w|} = \frac{150}{50} = 3,0$  on a donc bien  $e_1 \simeq 3$ .

$\triangleright$  Remarque : ainsi, pour 1 kJ "électrique" apporté au fluide frigorigère dans le compresseur, le fluide prélève 3 kJ "thermique" à la source froide. La conservation de l'énergie est bien assurée car le fluide frigorigère cède  $(1 + 3)\text{kJ} = 4 \text{ kJ}$  "thermique" à la source chaude. Dans le cadre d'une machine frigorigère, ce transfert thermique cédé à la source chaude n'est pas exploité et il est considéré "gratuit" car l'utilisateur lors du paiement de la facture d'électricité ne paiera que l'énergie électrique consommée.

**Q42.**  $\triangleright$  Le système est le fluide de la machine. Le schéma des échanges énergétiques est rappelée à la question **Q35**.

$\triangleright$  1<sup>er</sup> principe sur  $\Sigma = \{\text{fluide de la machine}\}$  sur un cycle :  $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$

En effet,  $U$  est une fonction d'état et donc sur un cycle  $\Delta U = U_{EF} - U_{EI} = 0$ . On a donc  $W + Q_c + Q_f = 0$  (1)

$\triangleright$  2<sup>nd</sup> principe sur  $\Sigma$  sur un cycle réversible (donc  $S_{créée} = 0$ ) :  $\Delta S = S_{éch} + S_{créée} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ .

En effet,  $S$  est une fonction d'état et donc sur un cycle  $\Delta S = S_{EF} - S_{EI} = 0$ . On a donc  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$  (2)

▷ On exploite (1) et (2) dans l'efficacité :  $e_{\text{Carnot,frigo}} = \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} = \frac{Q_f}{W} \stackrel{(1)}{=} \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \stackrel{(2)}{=} \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}}$

Ainsi on a  $e_{\text{Carnot,frigo}} = \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$  qui est bien l'efficacité de Carnot d'un frigo.

**Q43.** ▷  $e_{\text{Carnot,frigo}} = \frac{273 + 3}{20} = 13,8$  ce qui est assez nettement supérieur à l'efficacité de  $e = 3,0$  de la machine « réelle » trouvée à la question **Q41.**

▷ Réponse classique : **on pouvait s'y attendre car le cycle réel n'est pas réversible** et donc nécessairement on a l'inégalité  $e < e_{\text{Carnot,frigo}}$ .

Plus précisément, on peut citer les différentes origines de l'irréversibilité : les 2 refroidissements isobare dans le condenseur (désurchauffe du gaz et sous-refroidissement du liquide) sont irréversibles. L'échauffement isobare dans l'évaporateur (surchauffe du gaz) également. Enfin, la détente 3 → 4 est aussi irréversible.

On pourrait démontrer ces irréversibilités en déterminant l'entropie massique créée lors de chacune des étapes via le 2<sup>nd</sup> principe en système ouvert :  $s_{\text{créée}} = \Delta s - \frac{q}{T_{\text{ext}}}$  avec  $q$  qui se détermine via le 1<sup>er</sup> principe en système ouvert et  $\Delta s$  qui se lit avec les isentropiques (sur le diagramme enthalpique, il n'y a pas assez d'isentropes pour faire correctement cette étude.)

▷ Réponse moins classique : d'après le cycle de la **figure 7**, le fluide en sortie du condenseur atteint  $30^\circ\text{C} > T_c$  et à la sortie de l'évaporateur il atteint  $-20^\circ\text{C} < T_f$ . Cela signifie que la longueur des échangeurs thermiques n'est pas suffisante pour que le fluide atteigne  $T_c$  à la sortie du condenseur et  $T_f$  à la sortie de l'évaporateur. Cela diminue alors l'efficacité de la machine qui ne peut donc pas être égale à l'efficacité maximale d'une machine thermique ditherme : l'efficacité de Carnot. En effet, si on trace un cycle avec des échangeurs thermiques plus long de sorte que  $T_3 \rightarrow T_c = 23^\circ\text{C}$  et  $T_1 \rightarrow T_f = 3^\circ\text{C}$ , alors on peut montrer que l'efficacité augmente légèrement (sans atteindre l'efficacité de Carnot évidemment car le cycle reste irréversible quoi qu'il en soit).

▷ *Remarque* : Les changements d'état dans le condenseur (liquéfaction) et l'évaporateur (vaporisation) sont réversibles. La compression 1 → 2 dans le compresseur est réversible d'après l'énoncé. En réalité la compression 1 → 2 n'est pas rigoureusement adiabatique et réversible. Elle est non adiabatique et irréversible. En pratique l'efficacité réelle d'un réfrigérateur est aux alentours de 3.

**Q44.** ▷ Le changement d'état G→S est la **condensation** (ou condensation solide). Attention, ça n'est pas la solidification qui est le changement d'état L → S

**Q45.** ▷ 2<sup>nd</sup> principe sur  $\Sigma = \{\text{fluide de la machine}\}$  sur un cycle irréversible :  $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_c = 0$

▷ En multipliant par  $\frac{T_c}{Q_f}$  des 2 côtés de l'équation précédente cela devient :  $0 = \frac{Q_c}{Q_f} + \frac{T_c}{T_f} + \frac{S_c T_c}{Q_f} \Rightarrow \frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f} \left(1 + \frac{T_f S_c}{Q_f}\right)$

▷ On a donc bien  $\frac{Q_c}{Q_f} = -\alpha \frac{T_c}{T_f}$  avec  $\alpha = 1 + \frac{T_f S_c}{Q_f}$

**Q46.** ▷ Par définition, on a  $e_1 = \frac{q_f}{w}$  et  $e_2 = \frac{q_f}{w'}$  puisque l'énoncé précise que l'entropie créée  $S_c$  augmente pour un même transfert thermique pris à la source froide lors d'un cycle. On a donc  $\frac{e_1}{e_2} = \frac{w'}{w} = \frac{3}{1,5} = 2$ .

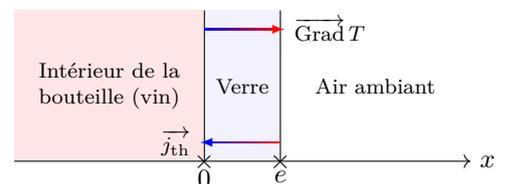
▷ Pour écrire cela en terme d'énergie électrique consommée, on peut écrire que pour un débit massique de fluide  $D_m$  et une durée  $\Delta t$  de fonctionnement on a :  $\frac{P_i' \Delta t}{P_i \Delta t} = \frac{D_m w'}{D_m w} = \frac{w'}{w}$ . On a donc  $\frac{e_1}{e_2} = \frac{w'}{w} = \frac{P_i' \Delta t}{P_i \Delta t} = 2$

▷ Ainsi la **surconsommation engendré par le givre est d'un facteur 2 : le réfrigérateur consommera 2 fois plus d'énergie électrique pour la même température à l'intérieur du frigo ; l'utilisateur aura donc une facture d'électricité plus élevée** ; d'où l'importance de dégivrer son réfrigérateur.

**Q47.** ▷ La loi de Fourier s'écrit :  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \text{Grad} T$  avec  $\vec{j}_{\text{th}}$  le vecteur densité volumique de courant thermique en  $\text{W}/\text{m}^2$  (aussi appelée vecteur densité de flux thermique) et  $\lambda > 0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique du matériau.

▷ Dans le cas unidimensionnel, on a  $T(x, t)$  et cela devient  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$  (j'utilise une dérivée partielle car  $T$  peut dépendre de  $x$  et de  $t$  ; le barème donnerait aussi les points à la version avec une dérivée droite).

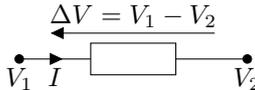
▷ Sur le schéma ci-contre j'ai représenté le vecteur  $\text{Grad} T$  défini en tout point du verre et qui « pointe » vers là où la température augmente le plus.  $\vec{j}_{\text{th}}$  est dans le sens contraire de  $\text{Grad} T$  ce qui est cohérent avec l'intuition : le transfert thermique se fait du chaud vers le froid.



**Q48.**  $\triangleright$   $T \leftrightarrow V$  (avec  $V$  le potentiel électrique) et  $\varphi \leftrightarrow I$  (avec  $I$  l'intensité du courant électrique)

$\triangleright$  On a donc également l'analogie suivante pour la loi d'Ohm :  $R_{th} = \frac{\Delta T}{\varphi} \leftrightarrow R = \frac{\Delta V}{I}$  (avec  $R$  la résistance électrique).

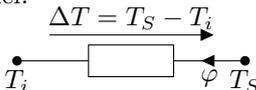
$\triangleright$  *Remarques :*

— La loi d'Ohm sous cette forme est valable uniquement en convention récepteur  (même principe pour la loi d'Ohm thermique).

— L'analogie entre  $\varphi$  et  $I$  est très intuitive. En effet,  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  s'exprime en  $A = C/s$ ; c'est donc un débit de charge.

$\varphi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$  s'exprime en  $W = J/s$ ; c'est donc un débit d'énergie.

— L'utilisation de résistance thermique est possible uniquement dans le cadre de l'ARQS thermique (cette notion est d'ailleurs hors programme en TSI) et en l'absence de terme source d'énergie. C'est bien le cas ici.

**Q49.**  $\triangleright$   $R_{th}$  est définie par la loi d'Ohm thermique :  $R_{th} = \frac{T_S - T_i}{\varphi}$  avec la convention récepteur : 

**Q50.**  $\triangleright$  Le flux thermique  $\varphi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$  représente la puissance thermique traversant algébriquement la surface  $S$  dans le sens de  $d\vec{S}$ .

$\triangleright$  Ici on choisit  $d\vec{S} = -dS\vec{u}_x$  afin d'avoir un flux thermique positif (mais ceci n'est pas une obligation en soit).

$\triangleright$  D'après la loi de Fourier en régime stationnaire :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$  et donc  $\varphi$  s'exprime par :

$$\varphi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x \cdot (-dS)\vec{u}_x = \lambda \iint_S \frac{dT}{dx} dS$$

$\triangleright$  Enfin puisque,  $\vec{j}_{th}$  et  $\frac{dT}{dx}$  sont uniformes sur toutes sections du verre  $S = \ell \times L$ , le calcul de l'intégrale double n'est pas

nécessaire et donc :  $\varphi = \lambda \frac{dT}{dx} S$  avec  $S = \ell \times L$

$\triangleright$  En régime stationnaire et sans terme source, on a conservation du flux thermique :  $\varphi(x) = \varphi(x + dx)$  c'est-à-dire que  $\varphi = cte$ .

Cela se démontre en appliquant le 1<sup>er</sup> principe monobare sur 1 tranche de verre  $[x, x + dx]$  entre  $t$  et  $t + dt$  (on dit aussi que l'on fait un bilan d'énergie sur 1 tranche de verre  $[x, x + dx]$  entre  $t$  et  $t + dt$ ) :  $dH = H(t + dt) - H(t) = \delta Q_e - \delta Q_s$  avec :

- $dH = H(t + dt) - H(t)$  la variation infinitésimale d'enthalpie de la tranche entre  $t$  et  $t + dt$ . En régime stationnaire, on a évidemment  $dH = 0$
- $\delta Q_e$  le transfert thermique algébriquement rentrant en  $x + dx$  entre  $t$  et  $t + dt$  qui s'exprime selon  $\delta Q_e = \varphi(x + dx)dt$
- $\delta Q_s$  le transfert thermique algébriquement sortant en  $x$  entre  $t$  et  $t + dt$  qui s'exprime selon  $\delta Q_s = \varphi(x)dt$

$\triangleright$  À partir de  $\varphi = \lambda \frac{dT}{dx} S$  et sachant que  $\varphi$  est constant, on raisonne par séparation des variables :  $dT = \varphi \frac{dx}{\lambda S}$

D'où en intégrant entre  $x = 0$  et  $x = e$  on obtient :

$$\int_{T(x=0)=T_i}^{T(x=e)=T_S} dT = \varphi \int_{x=0}^{x=e} \frac{dx}{\lambda S} \Leftrightarrow T_S - T_i = \frac{e}{\lambda S} \varphi \Rightarrow R_{th} = \frac{T_S - T_i}{\varphi} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda \ell L}$$

$\triangleright$  *Remarques :*

— on peut également obtenir la résistance thermique en établissant l'ED vérifiée par  $T(x)$ . Il faut ensuite résoudre l'ED pour déterminer  $T(x)$  et enfin il faut calculer  $\varphi = \lambda \frac{dT}{dx} S$  pour pouvoir déterminer la résistance thermique. Cette autre méthode est parfaitement acceptable et elle marche très bien mais est légèrement plus longue. Par contre cette autre méthode a l'avantage de donner l'expression de  $T(x)$  ce que ne donne pas directement la méthode présentée ici.

— Avec la méthode présentée ici, si on veut déterminer  $T(x)$  il suffit de dire que puisque  $\varphi = \lambda \frac{dT}{dx} S = cte$ , on a  $\frac{dT}{dx} = A$  avec  $A$  une constante. D'où  $T(x) = Ax + B$  avec  $A$  et  $B$  que l'on détermine avec les conditions aux limites  $T(x = 0) = T_i$  et  $T(x = e) = T_S$ . Cela donne après calcul  $T(x) = T_i + \frac{T_S - T_i}{e} x$

**Q51.** ▷ Les 4 faces latérales de la bouteille de vin assimilables à 4 résistances thermique  $R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda \ell L}$ . Elles sont en parallèles car elle sont soumises à la même différence de température. Par analogie avec l'association parallèle de résistances électriques, on a donc  $\frac{1}{R_{th, \text{éq}}} = \frac{1}{R_1} = \sum_i R_{th, i} = \frac{4}{R_{th}}$

▷ D'où, 
$$R_1 = \frac{R_{th}}{4} = \frac{e}{4\lambda S} = \frac{e}{4\lambda \ell L}$$

▷ *Remarques :*

— L'association parallèle dans cette question peut aussi se démontrer.

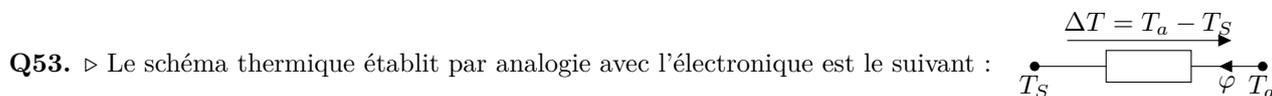
Il suffit d'écrire que le flux thermique total de l'extérieur de l'air vers le vin vaut la somme des flux à travers chacune des surfaces latérales (une loi des nœuds thermique en quelque sorte) :  $\varphi_{\text{éq}} = \sum_i \varphi_i$ .

Or par loi d'Ohm thermique, les 4 flux sont égaux et s'expriment selon  $\varphi_i = \varphi = \frac{T_s - T_i}{R_{th}}$ .

On a donc  $\varphi_{\text{éq}} = 4 \frac{T_s - T_i}{R_{th}}$  en identifiant avec  $\varphi_{\text{éq}} = \frac{T_s - T_i}{R_{th, \text{éq}}}$ , on retrouve bien le fait que  $R_{th, \text{éq}} = \frac{R_{th}}{4}$

— On peut également répondre à cette question en disant que du point de vu du transfert thermique, tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule face de surface  $S_{\text{tot}} = 4\ell L$  et donc  $R_1 = \frac{e}{\lambda S_{\text{tot}}} = \frac{e}{4\lambda \ell L}$

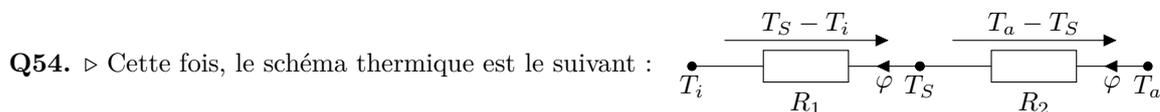
**Q52.** ▷ 
$$\begin{cases} \varphi & \text{en W} \\ S & \text{en m}^2 \\ (T_S - T_a) & \text{en K} \end{cases} \text{ donc } h = \frac{\varphi}{S(T_S - T_a)} \text{ en } \boxed{\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$$



▷ Par définition d'une résistance thermique (notée  $R_{th, cc}$  pour résistance conducto-convective), on a  $R_{th, cc} = \frac{T_a - T_S}{\varphi}$ . Or d'après la loi de Newton de l'échange conducto-convectif (rappelé par l'énoncé conformément au programme) on a :  $\varphi = hS(T_S - T_a)$

On a donc  $R_{th, cc} = \frac{T_a - T_S}{\varphi} = \frac{1}{hS}$

▷ Les 4 résistances conducto-convectives sont en parallèles (comme à la question **Q51.**) et donc 
$$R_2 = \frac{R_{th, cc}}{4} = \frac{1}{4hS} = \frac{1}{4h\ell L}$$



▷ Les résistances thermiques  $R_1$  et  $R_2$  sont en série donc 
$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 = \frac{1}{4\ell L} \left( \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h} \right)$$

▷ Or  $\frac{e}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-3} \text{uSI}$  et  $\frac{1}{h} = 10^{-1} \text{uSI}$ . Ainsi,  $R_2$  est plus de 30 fois plus élevée que  $R_1$  ; c'est-à-dire que  $R_2 \gg R_1$

▷ L'application numérique se calcule simplement selon 
$$R_{\text{tot}} \simeq R_2 = \frac{1}{4h\ell L} = \left( \frac{1}{4 \times 10 \times 0,2 \times 0,075} \right) \text{K/W} \simeq 1,67 \text{K/W}$$

▷ Le fait que  $R_2 \gg R_1$  signifie que la couche conducto-convective apporte une meilleure isolation thermique que le verre lui-même.

En terme de température, cela implique que pour le même flux thermique, la chute de température est beaucoup plus élevée dans la couche conducto-convective que dans le verre :  $\Delta T_{cc} = T_a - T_S = R_2 \times \varphi \gg \Delta T_{\text{verre}} = R_1 \times \varphi$

**Q55.** ▷ Appliquons le 1<sup>er</sup> principe monobare sur le système  $\Sigma = \{\text{vin} + \text{bouteille}\}$  entre  $t$  et  $t + dt$  :  $dH = \delta Q + \delta W_{\text{autres}}$  avec :

—  $\delta Q = \varphi dt > 0$  J le transfert thermique infinitésimal algébriquement reçu par  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ .

Le signe est cohérent puisque  $\varphi$  a été défini avec une surface orientée dans le sens de  $-\vec{u}_x$  (c'est-à-dire vers l'intérieur de la bouteille). Par ailleurs, puisque  $T_a > T_i$  on s'attend bien à ce que le vin reçoive effectivement un transfert thermique.

—  $dH = CdT$  la variation d'enthalpie de  $\Sigma$  (assimilable à une phase condensée idéale) entre  $t$  et  $t + dt$ .  $dH > 0$  J car la température de  $\Sigma$  augmente au cours du temps puisque  $T_a > T_i$ .

—  $\delta W_{\text{autres}} = 0$  J car il n'y a pas de travail autre que celui des forces pressantes (pas de résistance chauffante par exemple)

Ainsi, on a  $CdT = \varphi dt$  et de plus d'après la question **Q54.**, on a également  $\varphi = \frac{T_a - T_i}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_a - T_i}{R_{\text{tot}}}$ .

▷ D'où,  $CdT = \varphi dt = \frac{T_a - T}{R_{\text{tot}}} dt$  soit après division par  $dt$  :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{tot}}C} = \frac{T_a}{R_{\text{tot}}C}$$

▷ On a donc la forme demandée avec  $\tau = R_{\text{tot}}C$  et  $K = \frac{T_a}{R_{\text{tot}}C} = \frac{T_a}{\tau}$

**Q56.** ▷ Les solutions de l'ED précédente sont de la forme  $T(t) = T_{\text{sp}} + T_{\text{eh}}$  avec  $T_{\text{sp}} = T_a$  la solution particulière et  $T_{\text{eh}} = A \exp(-t/\tau)$  la solution de l'ED homogène.

▷ On détermine  $A$  avec la condition initiale :  $T(t=0) = T_i = T_a + A \exp(-0/\tau) = T_a + A \Rightarrow A = T_i - T_a$

▷ D'où,  $T(t) = T_a + (T_i - T_a) \exp(-t/\tau)$  (il est également possible d'obtenir cette expression par séparation des variables mais ça n'a pas grand intérêt).

▷ On résout ensuite  $T(t_d) = T_D = T_a + (T_i - T_a) \exp(-t_d/\tau) \Rightarrow t_d = \tau \ln \left( \frac{T_a - T_i}{T_a - T_D} \right)$

▷ L'application numérique donne alors :  $t_d = \tau \ln \left( \frac{14}{6} \right) \simeq 0,8\tau = 4,32 \cdot 10^3 \text{ s} = 1\text{h}12\text{min}$

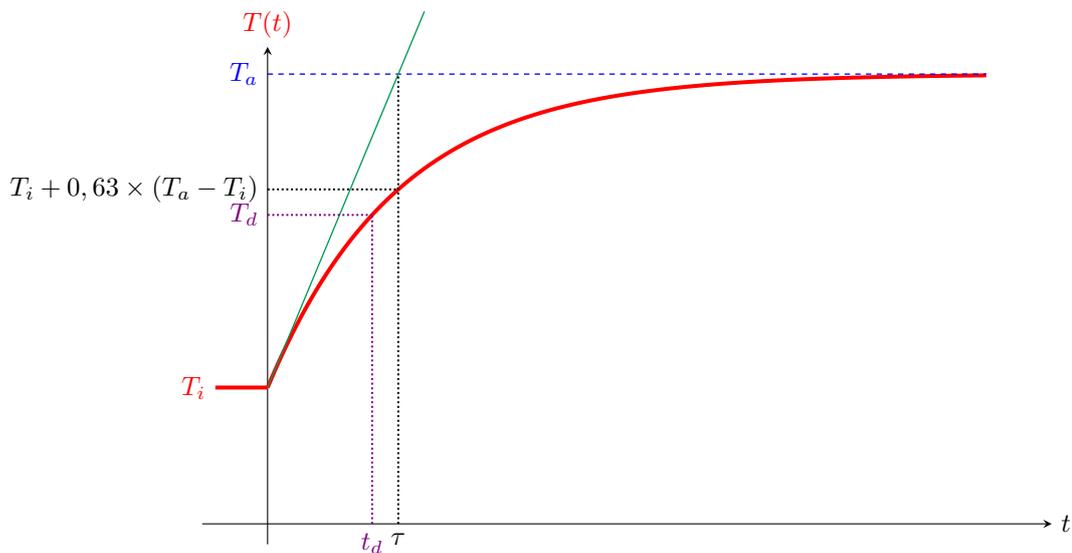
▷ *Remarques :*

— L'intérêt de la séparation des variables est d'obtenir  $t_d = \tau \ln \left( \frac{T_a - T_i}{T_a - T_D} \right)$  sans l'obtention de  $T(t)$ .

En effet,  $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_a}{\tau}$  se sépare en  $\frac{dT}{T - T_a} = \frac{dt}{\tau}$  et donc :  $\int_{T(t=0)=T_i}^{T(t=t_d)=T_D} \frac{dT}{T - T_a} = \int_{t=0}^{t=t_d} \frac{dt}{\tau} \Rightarrow t_d = \tau \ln \left( \frac{T_a - T_i}{T_a - T_D} \right)$

Cette méthode nécessite de bien savoir calculer les intégrales (pas évident pour tous les élèves)

— L'énoncé ne le demande pas mais on peut tracer l'évolution de  $T(t)$  car c'est une compétence à maîtriser. Par rapport au tracé classique à savoir refaire, je rajoute la température de dégustation  $T_d$  et le temps avant de pouvoir commencer la dégustation  $t_d$ .



**Q57.** ▷ Si  $h$  augmente, alors  $R_{\text{tot}} = \frac{1}{4h\ell L} \left( \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h} \right)$  diminue tandis  $C$  est inchangée.

▷ **Donc si  $h$  augmente,  $\tau = R_{\text{tot}}C$  diminue ; ainsi la durée  $t_d \simeq 0,8\tau$  diminue si  $h$  augmente**

▷ Cela est intuitif car si  $h$  augmente, alors le transfert thermique de l'air vers  $\Sigma = \{\text{vin} + \text{bouteille}\}$  va être plus intense ( $\varphi = \frac{T_a - T}{R_{\text{tot}}}$  augmente puisque  $R_{\text{tot}}$  diminue). Donc le refroidissement de  $\Sigma$  est plus rapide si  $h$  augmente.

▷ *Remarque :* Pour faire augmenter  $h$ , on peut imaginer qu'un ventilateur souffle de l'air sur la bouteille. Cela permet d'avoir une convection forcée ce qui va avoir pour effet d'augmenter assez fortement  $h$  ( $h \sim 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  typiquement pour une convection forcée contre  $h \sim 10^1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  pour la convection naturelle)

**Q58.** ▷ Point 1 : Dans la cavité du micro-onde se crée une onde stationnaire puisque  $\vec{E}(x, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$  a la structure d'une onde stationnaire sinusoïdale.

Cette onde stationnaire contrairement à une onde progressive ne se propage pas, elle « vibre sur place ». Pour une onde stationnaire, il existe des lieux dont l'amplitude de vibration est maximale ; ce sont les ventres de vibration. On sait que

deux ventres successifs sont distant de  $\lambda/2$ .

▷ Point 2 : C'est **au niveau des ventres que le chocolat fond d'abord** car c'est autour des ventres que les molécules du chocolat sont le plus fortement excitée par  $\vec{E}$ .

▷ Point 3 : Sur l'image du **document 2**, puisque la tablette fait 7 cm de large, on a  $7 \text{ cm} \leftrightarrow 2,4 \text{ cm}_{\text{feuille}}$ . On mesure l'écart entre les deux ventres à  $2,1 \text{ cm}_{\text{feuille}}$  ce qui correspond à  $2,1 \times \frac{7}{2,4} \text{ cm} \simeq 6 \text{ cm}$ .

D'où  $\frac{\lambda}{2} \simeq 0,06 \text{ m}$  et donc  $\lambda = 0,12 \text{ m}$

▷ Conclusion : On en déduit la fréquence  $f = \frac{c}{\lambda} \simeq \frac{3 \cdot 10^8}{0,12} \text{ Hz} = \frac{10^{10}}{4} \text{ Hz} = 2,5 \text{ GHz}$

▷ Commentaire : ▷ *Remarques* :

— On peut démontrer que deux ventres successifs sont distants de  $\lambda/2$ .

Soit en disant qu'à un instant  $t_1$  fixé deux ventres successifs correspondent à un minimum et un maximum successif de  $\vec{E}(x, t_1)$ . L'écart entre deux ventres successifs est donc égal à la moitié de la période spatiale soit  $\lambda/2$ .

Sinon on le démontre mathématiquement. Les positions  $x_V$  des ventres sont données par l'équation  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}(x_V, t) = \vec{0} \forall t$  soit  $2E_0 k \sin(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_y = \vec{0} \forall t$ . D'où,  $x_{V,p} = \frac{(p+1/2)\pi}{k}$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Puisque  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , on a donc  $x_{V,p} = (p+1/2) \frac{\lambda}{2}$  et donc la distance entre deux ventres successifs est bien de  $|x_{V,p+1} - x_{V,p}| = \frac{\lambda}{2}$

— Cette mesure que tout le monde peut réaliser chez lui est étonnamment très bonne puisque la fréquence des fours à micro-onde domestique est de 2,450 GHz.

C'est étonnant pour moi car la structure de l'onde à l'intérieur de la cavité du four à micro-ondes n'est probablement pas aussi simple que l'expression proposée; l'onde réelle a à minima une amplitude qui varie selon  $y$  et  $z$ . Peut-être même qu'il y a des ventres et des nœuds dans les directions  $y$  et  $z$ . Mais cela montre que parfois, une modélisation simple permet de tirer des conclusions pertinentes.

— Dans la modélisation proposée ici, les ventres positionnés en  $x_{V,p} = p \frac{\lambda}{2}$  correspondent à des plans; on pourrait donc s'attendre à ce que la plaquette fonde suivant des lignes. Or ce n'est pas le cas en pratique; cela montre que l'onde réelle est un peu plus compliquée que celle proposé par le **document 1**.

— Puisque la fréquence d'un four à micro-onde est de 2,450 GHz, la largeur suivant la direction  $x$  n'est pas quelconque. En effet, au niveau des 2 métaux parfait en  $x = 0$  et  $x = L$  il y a un nœuds de champ électrique (d'après le cours de 2<sup>ème</sup> année). On a donc  $\sin(kx) = 0$  (automatiquement vérifiée) mais aussi  $\sin(kL) = 0 \Rightarrow L = \frac{p_{\max} \pi}{k} = p_{\max} \frac{\lambda}{2}$  avec  $p_{\max} \in \mathbb{N}^*$ . Pour un four à micro-onde typique on peut imaginer que  $p_{\max} = 5$  de sorte que  $L = p_{\max} \frac{\lambda}{2} = 30 \text{ cm}$