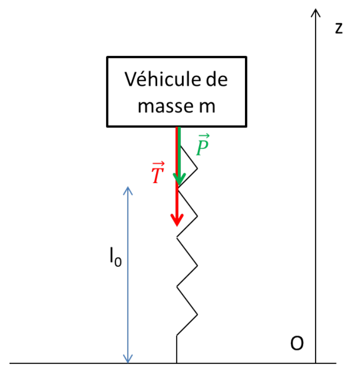
Premier problème : modélisation d'une suspension de véhicule

Première partie : suspension sans amortissement

1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces s'exerçant sur le véhicule sont le poids du véhicule $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k(l-l_0)\vec{u}_z = -k(z-l_0)\vec{u_z}$. Dans le cas du schéma, on a choisi $z > l_0$ pour le sens de $\overrightarrow{T}$.



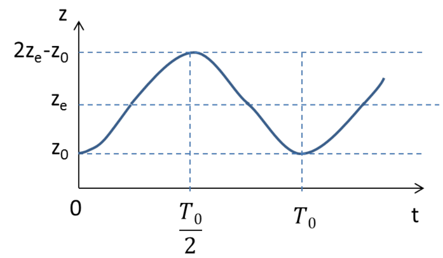
2. A l'équilibre, $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ d'après la première loi de Newton. On en déduit :
$$z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :
$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$
Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :
$$m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0)$$
$$\Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

4. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique pur avec un second membre constant.
On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ω_0 est la pulsation propre. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est la période propre des oscillations.
La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière : $z(t) = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t + z_e$ où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer avec les conditions initiales.
AN : $\omega_0 = \sqrt{\frac{10^5}{10^3}} = 10$ s^{-1} et $T_0 = \frac{2\pi}{10} \approx 0,628$ s.

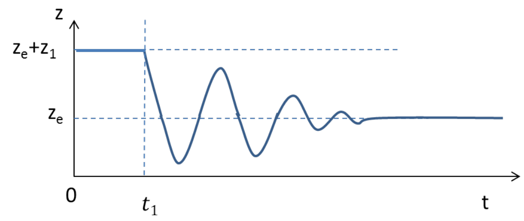
5. On donne les conditions initiales : à $t = 0$, $z(0) = z_0 < z_e$ et $\dot{z}(0) = 0$.
Par conséquent $A + z_e = z_0 \Rightarrow A = z_0 - z_e$ et $\dot{z}(t) = -\omega_0 Asin\omega_0 t + \omega_0 Bcos\omega_0 t \Rightarrow B = 0$.
Donc finalement :
$$z(t) = (z_0 - z_e)cos\omega_0 t + z_e$$

6. On calcule $z(t)$ pour différentes valeurs de t : $z(T_0/4) = z_e = z_{moy}$; $z(T_0/2) = 2z_e - z_0 = z_{max}$; $z(3T_0/4) = z_e$; $z(T_0) = z(0) = z_0 = z_{min}$
D'où l'allure suivante :



Deuxième partie : suspension avec amortissment

7. On a : $[h] = [F]/[v] = (\text{kg.m.s}^{-2})/(\text{m.s}^{-1}) = \text{kg.s}^{-1}$
8. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces s'exerçant sur le véhicule sont le poids du véhicule $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k(l-l_0)\vec{u}_z = -k(z-l_0)\vec{u_z}$ et la force de frottement fluide : $\overrightarrow{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$
   Lorsque le véhicule est à l'équilibre, la vitesse vaut 0, donc $\overrightarrow{F} = \vec{0}$, et par conséquent la position d'équilibre reste inchangée : $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Rightarrow z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$
9. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :
   $$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$$
   Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :
   $$m\ddot{z} = -mg - k(z-l_0) - h\dot{z}$$
   $$\Longrightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$
10. On écrit l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$
    Si $\Delta > 0$ donc si $h > 2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et le régime est apériodique.
    Si $\Delta < 0$ donc si $h < 2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont complexes et le régime est pseudopériodique.
    Si $\Delta = 0$ donc si $h = 2\sqrt{km}$, alors la solution de l'équation caractéristique est double et le régime est critique.
11. 11.1) Soit m_0 la masse du véhicule à vide et M masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule est en charge, alors $h = 2\sqrt{km_0}$. En charge, $m = m_0 + M > m_0$, par conséquent $h < 2\sqrt{km}$ et le régime devient pseudopériodique.
    11.2) Pour ne pas que la suspension soit en régime pseudopériodique même en charge, il faut choisir $h > 2\sqrt{km_0}$. On peut supposer que $M << m_0$ et que par conséquent, même en charge, la suspension reste en régime apériodique.
12. Il s'agit dans cette question d'étudier la réponse à un échelon de hauteur z_1 (marche).
    12.1) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t >> t_1) = z_e$
    NB : Il est dommage que l'énoncé ne demande pas la forme des solutions dans ce cas, tout à fait à la portée des candidats :
    $$z(t) = (Acos\omega t + Bsin\omega t)\, e^{-\frac{ht}{2m}} + z_e$$
    avec ω la pseudopulsation : $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{h^2}{4mk}}$
    Et avec les CI : $A = z_1$ et $B = \frac{h}{2m\omega}A$
    D'où l'allure du signal :



12.2) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t >> t_1) = z_e$

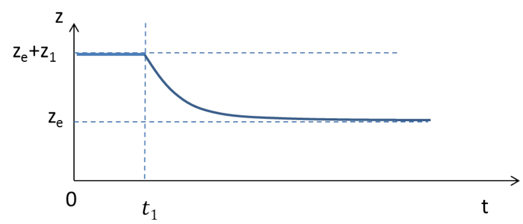
NB : Même remarque :

$$z(t) = (Ach\Omega t + Bsh\Omega t)\, e^{-\frac{ht}{2m}} + z_e$$

avec Ω une constante homogène à une pulsation : $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{h^2}{4mk} - 1}$

Et avec les CI : $A = z_1$ et $B = -\frac{h}{2m\omega}A$

D'où l'allure du signal :



Troisième partie : régime forcé

13. L'expression de la force de rappel du ressort est toujours la même : $\overrightarrow{T} = -k(l - l_0)\vec{u_z}$. Ici $l = z - z_s$, d'où $\overrightarrow{T} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u_z}$
14. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :
$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$$
Toutes les forces étant portées par $\vec{u_z}$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :
$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_s - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_s)$$
$$\Longrightarrow m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = h\dot{z}_s + kz_s + kz_e$$
15. On pose $z' = z - z_e$. On a $\dot{z'} = \dot{z}$ et $\ddot{z'} = \ddot{z}$ car z_e est une constante, donc :
$$m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = h\dot{z}_s + kz_s$$
Soit $m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = Y(t)$ avec $Y(t) = h\dot{z}_s + kz_s$.
16. On pose $\underline{Z'} = \underline{Z'_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z'_m} = Z'_m e^{j\varphi}$ et $\underline{Z_s} = Z_{sm}e^{j\omega t}$
L'équation différentielle étant une équation linéaire, on peut directement la passer en grandeur complexe, par conséquent :
$$m\underline{\ddot{Z'}} + h\underline{\dot{Z'}} + k\underline{Z'} = h\underline{\dot{Z}_s} + k\underline{Z_s}$$
$$\Rightarrow -m\omega^2\underline{Z'} + j\omega h\underline{Z'} + k\underline{Z'} = j\omega h\underline{Z_s} + k\underline{Z_s}$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{k + j\omega h}{k - m\omega^2 + j\omega h}$$

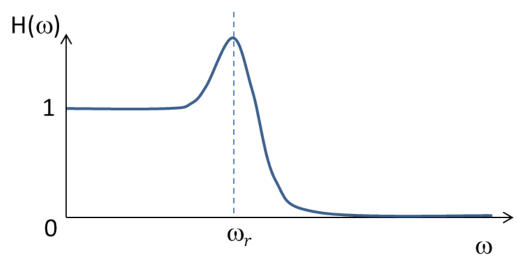
En posant $\lambda = h/2m$ et ${\omega_0}^2 = k/m$ on obtient :

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{{\omega_0}^2 + 2j\omega\lambda}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de l'expression précédente, on obtient bien :

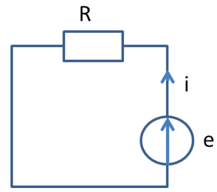
$$\left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{{\omega_0}^4 + 4\omega^2\lambda^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

17. 17.1) Pour $\omega \to 0$ on a $H \to \sqrt{\frac{{\omega_0}^4}{{\omega_0}^4}} \to 1$.
La masse suit directement le relief du sol, $z = z_e + z_s$ $\forall t$ donc le ressort a constamment sa longueur d'équilibre.
17.2) Pour $\omega \to \infty$ on a $H \to \sqrt{\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}} \to 0$.
La masse m ne bouge pas verticalement, $z = z_e$ $\forall t$.
17.3) ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal.
On pose $g(\omega) = ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$.
$g'(\omega) = -4\omega({\omega_0}^2 - \omega^2) + 8\lambda^2\omega$
$g'(\omega_r) = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = {\omega_0}^2 - 2\lambda^2$
L'énoncé précise qu'on est dans le cas où ${\omega_0}^2 > 2\lambda^2$, donc $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$.
H est maximum pour $\omega = \omega_r$ donc cette pulsation correspond à la pulsation de résonance en élongation.
18. On trace l'allure de la courbe $H(\omega)$ en tenant compte des limites calculées :



Quatrième partie : amortissement électromagnétique

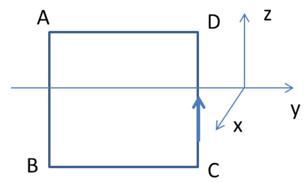
19. 19.1) Par définition $\Phi = \int\int \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = B \times S_{\text{cadre z>0}} = Bza$ car $\overrightarrow{B}$ est constant pour $z > 0$ et nul sinon.
19.2) La force électromagnétique induite est $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{z}$
19.3) L'orientation arbitraire du cadre étant imposée, on choisit de dessiner le circuit équivalent suivant :



On a donc en appliquant la loi des mailles :

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{Ba\dot{z}}{R}$$

20. La résultante de la force de Laplace qui s'applique sur le cadre est $\overrightarrow{F} = \int_{\text{cadre}} i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$.



$$\overrightarrow{F} = \int_A^B i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} + \int_B^C i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} + \int_C^D i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} + \int_D^A i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{F} = -izB\vec{u_y} + \vec{0} + izB\vec{u_y} + iaB\vec{u_z} = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u_z}$$

21. On remarque qu'on trouve bien le signe moins du principe de modération : si le cadre se déplace suivant $+\vec{u}_z$, alors $\dot{z} > 0$ et $\overrightarrow{F}$ est portée par $-\vec{u}_z$ et s'oppose au déplacement, donc le freine.

    Par rapport à un système de freinage classique, il n'y a pas d'usure des freins par frottement. L'énergie est dissipée par effet joule dans la résistance du cadre.

22. On souhaite que le cadre puisse servir d'amortisseur de coefficient de frottement h.

    On identifie les deux expressions de force : $\overrightarrow{F} = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u_z} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$

    Donc $B = \sqrt{\frac{Rh}{a^2}}$

23. Application numérique : $B = \sqrt{\frac{10^{-4}\times 10^4}{(10^{-1})^2}} = 10$ T

    Il faut donc un champ magnétique très intense ! Avec un aimant permanent, $B \approx 10^{-2}$ T, avec un électroaimant $B \approx 10$ T. On peut donc utiliser un électroaimant pour créer le champ magnétique nécessaire au système de freinage.

Deuxième problème : induction

Première partie : chauffage par induction

1 - Dans un conducteur ohmique de conductivité σ, le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$ sont liés par la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

2 - La circulation du champ électrique sur le contour Γ est donnée par :

$$C(r,t) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma} j(r,t)\overrightarrow{e_\theta} \cdot r d\theta \overrightarrow{e_\theta} = \frac{r}{\sigma} j(r,t) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi r}{\sigma} j(r,t)$$

3 - Le flux du champ magnétique à travers la surface Σ définie par le contour Γ est donné par :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{r} B_m \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z} \cdot r dr d\theta \overrightarrow{e_z} = B_m \cos(\omega t)\frac{1}{2} r^2 2\pi = \pi r^2 B_m \cos(\omega t) \quad si \quad r < a \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{r} B_m \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z} \cdot r dr d\theta \overrightarrow{e_z} = \underbrace{B_m \cos(\omega t)\frac{1}{2} a^2 2\pi}_{car\ B=0 si\ r>a} = \pi a^2 B_m \cos(\omega t) \quad si \quad a < r < b \end{cases}$$

4- La loi de Faraday nous donne la relation entre flux et force électromotrice : $e = -\frac{d\phi}{dt}$

Or, on sait que la force électromotrice est aussi égale à la circulation du champ électromoteur. Sur un contour fermé, la circulation du champ électrique se ramène à celle du champ électromoteur, on a alors :

$$e = C(r,t) = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{E_m} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt}$$

On en déduit :

$$\frac{2\pi r}{\sigma} j(r,t) = \begin{cases} -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B_m \cos(\omega t)\right) \quad si \quad r < a \\ -\frac{d}{dt}\left(\pi a^2 B_m \cos(\omega t)\right) \quad si \quad a < r < b \end{cases} \Rightarrow j(r,t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} r B_m \omega \sin(\omega t) \quad si \quad r < a \\ \frac{\sigma}{2r} a^2 B_m \omega \sin(\omega t) \quad si \quad a < r < b \end{cases}$$

5 - La puissance volumique dissipée par effet Joule est donnée par : $p_{joule} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

6 - La puissance totale dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur est donnée par :

$$P_{joule} = \iiint_{disque} p_{joule} d\tau = 2\pi e \int_0^b \vec{j} \cdot \vec{E} r dr = 2\pi e \int_0^b \frac{1}{\sigma} \left\|\vec{j}\right\|^2 r dr$$

$$P_{joule} = \frac{2\pi e}{\sigma}\int_0^b \left\|\vec{j}\right\|^2 rdr = \frac{2\pi e}{\sigma}\left[\int_0^a \left(\frac{\sigma}{2} rB_m\omega\sin(\omega t)\right)^2 rdr + \int_a^b \left(\frac{\sigma}{2r} a^2 B_m\omega\sin(\omega t)\right)^2 rdr\right]$$
$$= \frac{2\pi e\sigma}{4} B_m^2\omega^2\sin^2(\omega t)\left[\int_0^a r^3 dr + a^4\int_a^b \frac{1}{r}dr\right]$$
$$= \frac{\pi e\sigma}{2} B_m^2\omega^2\sin^2(\omega t)\left[\frac{1}{4}a^4 + a^4\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi e\sigma}{2} B_m^2\omega^2 a^4\sin^2(\omega t)\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

On en déduit alors l'expression de sa valeur moyenne :

$$\left\langle P_{joule}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_{joule}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\pi e\sigma}{2} B_m^2\omega^2 a^4\sin^2(\omega t)\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]dt = \frac{\pi e\sigma}{2} B_m^2\omega^2 a^4\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt}_{1/2}$$
$$= \frac{\pi e\sigma}{4} B_m^2\omega^2 a^4\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

On peut alors écrire son expression sous la forme :

$$\left\langle P_{joule}\right\rangle = A\omega^2 B_m^2 \quad avec \quad A = \frac{\pi e\sigma}{4} a^4\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

7 - Le champ magnétique souhaité peut être crée à l'aide d'une bobine alimentée par un courant sinusoïdal. On peut en augmenter l'intensité et le canaliser à l'aide d'un électroaimant.

Le rendement qu'une plaque à induction est bien meilleur que celui des plaques électriques classiques (30% de plus). La montée en température lors de la cuisson est très rapide. Elle consomme moins d'énergie puisque sans récipient (casserole), la plaque ne se met pas en marche. La chaleur est produite directement dans le récipient, la température de la plaque redescend donc très rapidement après cuisson.

8 - Dans le cas particulier où a = b, on a :

$$\left\langle P_{joule}\right\rangle = \frac{\pi e\sigma}{16} a^4\omega^2 B_m^2 = \frac{\pi\times 10^{-2}\times 6,0\times 10^7}{16}\left(10^{-1}\right)^4\left(2\times 10^5\right)^2\left(10^{-4}\right)^2 = \frac{\pi\times 6\times 4}{16}10^3 \approx 6\times 10^3 W$$

Deuxième partie : freinage électromagnétique

9 - Une roue constituée de conducteurs en mouvement de rotation autour de son axe est plongée pour moitié dans un champ magnétique uniforme et permanent. On a donc un circuit fermé mobile dans un champ magnétique permanent, il est le siège d'un phénomène d'induction, appelé induction de Lorentz. D'après la loi de Lenz, le courant induit tend à s'opposer par ses effets à la cause qui lui a donné naissance : ici, le mouvement de la roue. La roue sera donc ralentie.

10.1 - Le champ électromoteur est donné dans le cas de l'induction de Lorentz par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B} = r\omega\overrightarrow{e_\theta} \wedge B\overrightarrow{e_x} = r\omega B\overrightarrow{e_r}$$

10.2 - La force électromotrice crée sur chaque rayon immergé correspond à la circulation du champ électromoteur sur chacun de ses rayons :

$$e = \int_{rayon} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^L r\omega B\overrightarrow{e_r} \cdot dr\overrightarrow{e_r} = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

10.3 - Sur la circonférence de la roue, on obtient l'intégrale suivante :

$$e_{circonférence} = \int_{roue} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} r\omega B\overrightarrow{e_r} \cdot rd\theta\overrightarrow{e_\theta} = 0$$

Aucune force électromotrice n'apparaît donc sur la circonférence de la roue.

11.1 - L'expression de l'intensité i_0 se déduit d'une simple loi des mailles :

$$u = e - Ri_0 \quad soit \quad i_0 = \frac{e-u}{R}$$

De la même manière, on trouve l'intensité i_1 (convention générateur) :

$$u = -Ri_1 \quad soit \quad i_1 = -\frac{u}{R}$$

11.2 - En appliquant la loi des nœuds au centre O de la roue, on trouve :

$$\frac{N}{2} i_0 = -\frac{N}{2} i_1 \quad soit \quad i_0 = -i_1$$

On en déduit les expressions de i_0 et i_1 suivantes :

$$i_0 = \frac{e-u}{R} = \frac{e}{R} + i_1 = \frac{e}{R} - i_0 \quad soit \quad i_0 = \frac{e}{2R} = \frac{1}{4}\frac{B\omega L^2}{R}$$

$$i_1 = -i_0 = -\frac{e}{2R} = -\frac{1}{4}\frac{B\omega L^2}{R}$$

12.1 - Les rayons soumis à une force de Laplace sont ceux immergés dans le champ magnétique B permanent.

12.2 - La force élémentaire de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit de longueur dr est donnée par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{dF} = i_0\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = i_0 dr\overrightarrow{e_r} \wedge B\overrightarrow{e_x} = -i_0 Bdr\overrightarrow{e_\theta}$$

12.3 - Le moment élémentaire par rapport à l'axe Ox auquel est soumis cet élément de circuit se met alors sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = r\overrightarrow{e_r} \wedge \left(-i_0 B dr \overrightarrow{e_\theta}\right) = -i_0 B r dr \overrightarrow{e_x}$$

12.4 - Un rayon immergé est alors soumis au moment de la force de Laplace suivant :

$$\overrightarrow{M} = \int_0^L \overrightarrow{dM} = \int_0^L -i_0 B r dr \overrightarrow{e_x} = -i_0 B \frac{L^2}{2} \overrightarrow{e_x}$$

On obtient donc un moment qui s'oppose à la rotation de la roue, la loi de Lenz est vérifiée (voir question 9).

Le moment résultant appliqué aux différents rayons immergés de la roue (N/2) se met alors sous la forme :

$$\overrightarrow{M}_{tot} = -\frac{1}{4} N i_0 B L^2 \overrightarrow{e_x} = -\frac{1}{16} \frac{N B^2 \omega L^4}{R} \overrightarrow{e_x}$$

13 - En considérant le moment du poids des rayons de la roue nul par rapport à l'axe Ox, et en appliquant le théorème du moment cinétique à la roue en rotation autour de l'axe Ox dans le référentiel terrestre galiléen, on obtient :

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = \overrightarrow{M}_{tot} \cdot \overrightarrow{e_x} = -\frac{1}{16}\frac{NB^2\omega L^4}{R} \quad soit \quad J\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{16}\frac{NB^2L^4}{R}\omega = 0$$

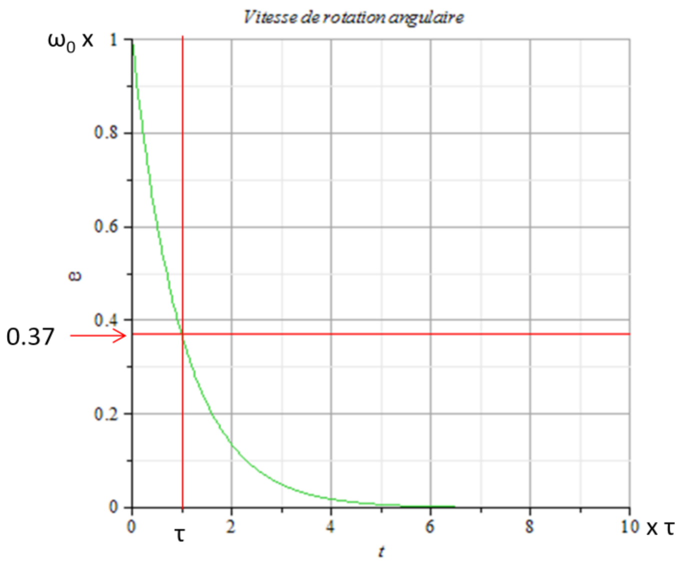
On peut donc réécrire cette équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0 \quad avec \quad \tau = \frac{16RJ}{NB^2L^4}$$

En supposant que la vitesse de rotation angulaire de la roue est égale à une valeur ω_0 à l'instant t = 0, la solution de l'équation se met sous la forme :

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$$

La constante τ aussi appelée constante de temps caractérise la rapidité de l'évolution de la vitesse de rotation angulaire dans le temps. Ainsi, en t = τ, la vitesse de rotation angulaire ne vaudra plus que 37% de sa valeur initiale.



14.1 - On peut considérer que la roue est arrêtée au bout de 5τ ce qui peut être assez important. Ce dispositif est donc intéressant en tant que dispositif de ralentissement secondaire car la vitesse de rotation angulaire diminue rapidement au début du freinage. On ne peut cependant pas l'utiliser comme dispositif unique car l'on mettrait beaucoup trop de temps pour s'arrêter.

Lors du freinage par courant de Foucault, l'énergie cinétique du véhicule est transformée sous forme de chaleur par effet Joule dans les conducteurs composant les rayons de la roue.

14.2 - Lors du freinage avec des freins à disque, l'énergie cinétique du véhicule est transformée sous forme de chaleur par frottement des disques sur les plaquettes.

Un dispositif de type frein à disque s'usera plus rapidement qu'un dispositif de type freinage par courant de Foucault à cause du frottement. Il faudra donc le changer plus souvent.