

# Étude physique d'un capteur de position

## I Étude de l'état de référence

- - 1. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents, l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}}$$

$\vec{j}$  correspond ici à la densité volumique de courant associée au **mouvement des charges libres**.

Soit  $\Gamma$  un contour fermé et  $S(\Gamma)$  une surface s'appuyant dessus :

$$\iint_{S(\Gamma)} \vec{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{d^2S} = \iint_{S(\Gamma)} \vec{j} \cdot \vec{d^2S}$$

D'après le théorème de Stokes :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enlacé,lib}}}$$

où  $I_{\text{enlacé,lib}}$  est l'intensité des courants libres enlacés algébriquement par  $\Gamma$ .

- - 2. L'équation de Maxwell-Thomson s'énonce ainsi :

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = \vec{0}}$$

Ainsi, en intégrant sur un volume  $V$  appuyé sur une surface  $S$  :

$$\iiint_{V(S)} \text{div} \vec{B} d^3\tau = 0$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = 0$$

On en déduit donc que le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est nul.

- - 3. Le plan en question est un plan de symétrie pour toutes les distributions de courant. D'après le principe de Curie, le champ  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan. On en déduit donc que  $\vec{B}$  est porté par  $\vec{u}_z$  en tout point de ce plan.
- - 4. Le plan  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  passe par  $M$  et est un plan d'antisymétrie des distributions de courant. Le principe de Curie nous dit donc que  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan, ainsi,  $B_\theta = 0$ .

De plus, les distributions de courant sont invariantes par rotation d'angle  $\theta$ , ainsi,  $\vec{B}$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Enfin,  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants. On en déduit donc la relation :

$$\vec{B}(r, -z) = -\sigma_{/z}(\vec{B}(r, z)) \quad \text{où } \sigma_{/z} \text{ est l'opérateur symétrie}$$

- - 5. Sur la simulation, on observe que le champ en  $z = 0$  est porté par  $\vec{u}_z$  en tout point. La simulation est donc cohérente avec la réponse à la question □ - 3..

On observe, de plus, que la norme du champ magnétique ne dépend que de  $r$  et  $z$ . En effet, on observe une symétrie horizontale sur la figure, attestant une indépendance de  $\theta$ .

Enfin, le dernier point d'antisymétrie est validé par la symétrie verticale de la simulation.

- - 6. Comme nous l'avons vu en réponse à la question □ - 4.,  $\vec{B}(r, -z) = -\sigma_{/z}(\vec{B}(r, z))$ . Si on détaille un peu plus cet opérateur symétrie, on peut écrire :

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \sigma_{/z}(\vec{B}(r, z)) = B_r(r, z)\vec{u}_r - B_z(r, z)\vec{u}_z$$

On en déduit donc que :

$$\vec{B}(r, -z) = -B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$$

En projetant, on obtient donc :

$B_r(r, z) = -B_r(r, -z)$	Impair
$B_z(r, z) = B_z(r, -z)$	Pair

- - 7. Sur le tracé ci-dessous, en orientant la ligne de champ selon  $\vec{u}_z$  comme indiqué dans l'énoncé, on peut observer :
- En  $M_1$  :  $B_r < 0$  et  $B_z > 0$
  - En  $M_2$  :  $B_r = 0$  et  $B_z > 0$
  - En  $M_3$  :  $B_r > 0$  et  $B_z > 0$

□ - 8. D'après les relations de passage du champ magnétique

On peut observer également ce phénomène au niveau du passage de l'air à la culasse ferromagnétique. Cela est cohérent dans la mesure où il s'agit d'un phénomène d'interface.

□ - 9. Sur la figure 3, les lignes de champ sont à peu près rectilignes et parallèles. Cela indique que le champ peut être considéré comme uniforme en bonne approximation.

Sur la figure 5, on observe un maximum local au voisinage du centre du noyau, le champ magnétique a une valeur qui varie peu localement.

- - 10. Les lignes de champ présentes sur la figure 3 s'écartent avec l'augmentation (ou diminution) de  $z$ . Cela est le témoin de la diminution de l'intensité du champ magnétique avec l'approche des bords du noyau.
- - 11. Soit  $\Phi_{p \rightarrow 1}$  le flux du champ créé par le primaire sur le secondaire noté (1). Par définition du flux, il est donné par la somme des flux au travers des spires entourant le noyau :

$$\Phi_{p \rightarrow 1} = nL_{\max} \times \Phi_{p \rightarrow 1 \text{ spire}} = nL_{\max} B_m S \text{ où } \Phi_{p \rightarrow 1 \text{ spire}} \text{ est le flux du champ créé par le primaire sur une seule spire}$$

Le flux sur une spire est donné directement par  $B_m S$  car le champ est considéré homogène sur la spire.

Or,  $B_m = K i_p$  donc  $\Phi_{p \rightarrow 1} = nL_{\max} K S i_p$ .

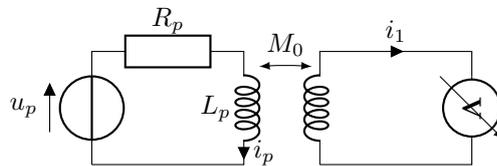
Par définition de l'inductance mutuelle,  $\Phi_{p \rightarrow 1} = M_1 i_p$ , on identifie donc :

$$M_1 = nL_{\max} K S$$

Le calcul menant à  $M_2$  serait similaire, on en déduit donc :

$$M_0 = nL_{\max} K S$$

□ - 12. Le circuit étudié dans l'énoncé est le suivant :



La loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi de Faraday permettent d'écrire :

$$\begin{cases} u_p = R_p i_p + L_p \frac{di_p}{dt} + M_0 \frac{di_1}{dt} \\ 0 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_0 \frac{di_p}{dt} \end{cases}$$

En passant en complexes, on obtient :

$$\begin{cases} U_p = R_p I_p + L_p j\omega I_p + M_0 j\omega I_1 \\ 0 = L_1 j\omega I_1 + M_0 j\omega I_p \end{cases}$$

Or,  $I_1 = 0$  d'après l'énoncé et on mesure :

$$U_1 = M_0 I_p \omega = 1,5 \text{ V} \quad \text{d'après la deuxième équation}$$

On déduit de la première équation :

$$U_p = \sqrt{R_p^2 I_p^2 + L_p^2 \omega^2 I_p^2} \quad \text{soit} \quad I_p = \frac{U_p}{\sqrt{R_p^2 + \omega^2 L_p^2}}$$

On en déduit :

$$M_0 = \frac{U_1 \sqrt{R_p^2 \omega^2 L_p^2}}{U_p \omega} = \frac{U_1 \sqrt{R_p^2 4\pi^2 f^2 L_p^2}}{U_p f}$$

L'application numérique donne :  $M_0 = 1,0 \text{ mH}$ .

## II Déplacement du noyau

□ - 13. On sait que  $L_p$  est définie par :

$$\Phi_{p \rightarrow p} = L_p i_p$$

Or, si  $|z| < L_{\max}$ , toutes les spires du primaire sont traversées par le même champ magnétique. Le flux propre du primaire reste donc le même, tout comme  $i_p$  d'après l'énoncé. On en déduit donc que  $L_p$  reste identique, il est donc indépendant de  $z$ .

□ - 14.  $M_1(z)$  est défini par :

$$\Phi_{p \rightarrow 1} = M_1(z) i_p$$

Par un raisonnement analogue à la question □ - 11., on peut établir :

$$\Phi_{p \rightarrow 1} = n(L_{\max} - z) B_m S = n(L_{\max} - z) K S i_p \quad \text{soit} \quad M_1(z) = n(L_{\max} - z) K S \text{ par identification}$$

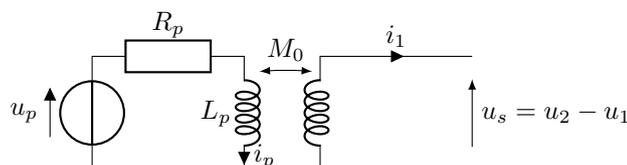
Or,  $M_0 = n L_{\max} K S$ , donc  $n K S = M_0 / L_{\max}$  soit :

$$M_1(z) = M_0 \left( 1 - \frac{z}{L_{\max}} \right)$$

□ - 15. De la même manière, on peut établir que :

$$\Phi_{p \rightarrow 2} = n(L_{\max} + z) K S i_p \quad \text{soit} \quad M_2(z) = M_0 \left( 1 + \frac{z}{L_{\max}} \right)$$

□ - 16. Le circuit secondaire étant considéré à vide, on peut donner le schéma suivant :



L'intensité dans ce deuxième circuit est donc nulle car il est ouvert. Le flux propre au sein de ce circuit est donc nul.

D'après la loi de Faraday, on peut écrire :

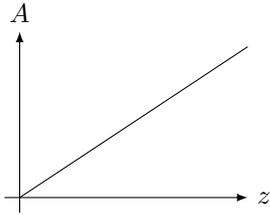
$$u_2 = M_2(z) \frac{di_p}{dt} \quad \text{et} \quad u_1 = M_1(z) \frac{di_p}{dt}$$

On en déduit :

$$u_s = [M_2(z) - M_1(z)] \frac{di_p}{dt} = \left[ M_0 \left( 1 + \frac{z}{L_{\max}} \right) - M_0 \left( 1 - \frac{z}{L_{\max}} \right) \right] \frac{di_p}{dt} = M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt} \times 2$$

On peut donc poser  $\lambda = 2$ .

- - 17.  $i_p$  étant fixé, son amplitude est connue et l'amplitude de  $\frac{di_p}{dt}$  est celle de  $i_p$  multipliée par la pulsation du signal, cette amplitude est donc indépendante de  $z$ . On en déduit donc que l'amplitude de  $u_s$  est proportionnelle à  $z$ , c'est ce paramètre  $A$  qu'on va donc mesurer. On trace ci-dessous son évolution en fonction de  $z$  :



$A$  est un paramètre positif, ainsi, il est proportionnel à  $|z|$ . Pour obtenir une information sur le signe de  $z$ , il faut donc connaître le déphasage du signal car le changement de signe de  $z$  va induire un déphasage de  $\pi$  par rapport à sa phase précédente.

Pour obtenir un signal de tension proportionnel à  $A$ , il faut réaliser un redresseur permettant de convertir un signal alternatif en signal continu.

### III Conditionnement du signal

- - 18. Un ALI idéal possède deux caractéristiques principales :

- Son impédance d'entrée est infinie : les courants de polarisation sont nuls  $i_+ = i_- = 0$
- Son impédance de sortie est nulle
- Son gain différentiel est infini :  $\varepsilon = 0$  en régime linéaire.

On étend souvent ce modèle au gain infini bien que parfois, on puisse étudier un ALI idéal de gain fini. On

A priori, on peut dire que :

- Les ALI (A1) et (A2) fonctionnent en régime linéaire car leur rétroaction est effectuée sur la borne inverseuse
- L'ALI (A3) fonctionne en régime saturé car sa rétroaction a lieu sur la borne non-inverseuse

- - 19. On considère l'ALI (A1). Le régime est *a priori* linéaire donc  $\varepsilon = 0$ .

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc :  $v_{+1} = 0$  (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que  $v_{-1} = 0$ , donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne  $\ominus$  :

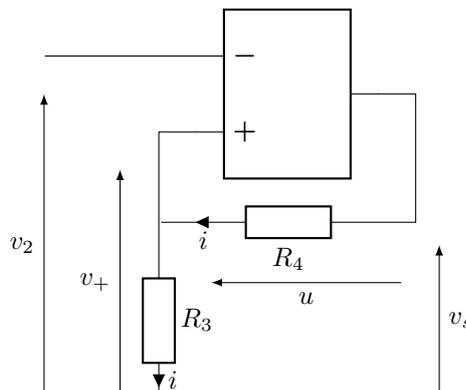
$$0 = v_{-1} = \frac{v_e}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow \frac{v_e}{R_1} = -\frac{v_1}{R_2} \Leftrightarrow v_e = -\frac{R_1}{R_2}v_1$$

On considère l'ALI (A2). Le régime est *a priori* linéaire donc  $\varepsilon = 0$ .

La borne non-inverseuse est reliée à la masse donc :  $v_{+2} = 0$  (potentiel de la borne non-inverseuse). On en déduit donc que  $v_{-2} = 0$ , donc d'après la loi des nœuds en termes de potentiels appliquée à la borne  $\ominus$  utilisée en régime sinusoïdal forcé :

$$0 = v_{-2} = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{1/j\omega C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{1/j\omega C}} \Leftrightarrow \frac{v_1}{R} = -v_2 j\omega C \Leftrightarrow v_1 = -RC \frac{dv_2}{dt}$$

- - 20. Introduisons quelques notations :



La loi d'Ohm donne :

$$R_3 i = v_+ \quad \text{et} \quad R_4 i = -u \quad \text{soit} \quad u = -v \frac{R_4}{R_3}$$

D'après la loi des mailles, on obtient :

$$v_+ = u + v_s \quad \text{soit} \quad v_+ \left( 1 + \frac{R_4}{R_3} \right) = v_s$$

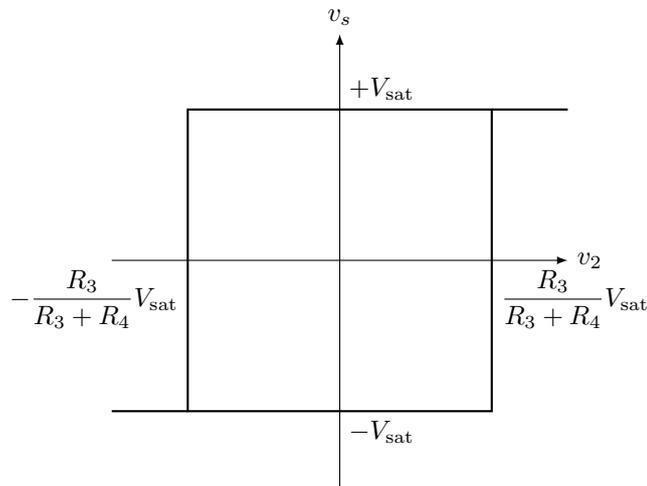
On en déduit donc :

$$\varepsilon = v_+ - v_- = v_s \frac{R_3}{R_3 + R_4} - v_2$$

Ainsi, procédons en suivant un chemin :

- Si  $v_2 < 0$  et  $v_s = +V_{\text{sat}}$  ensuite,  $v_2$  augmente jusqu'à  $V_{\text{lim}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$ . À partir de cette valeur,  $v_2$  continue d'augmenter mais  $v_s = -V_{\text{sat}}$  car  $\varepsilon$  devient négatif.
- Ensuite,  $v_2$  diminue jusqu'à  $-V_{\text{lim}}$  à partir d'où  $v_s = +V_{\text{sat}}$  et  $v_2$  continue de diminuer dans les valeurs négatives.

On peut ainsi tracer le cycle suivant :



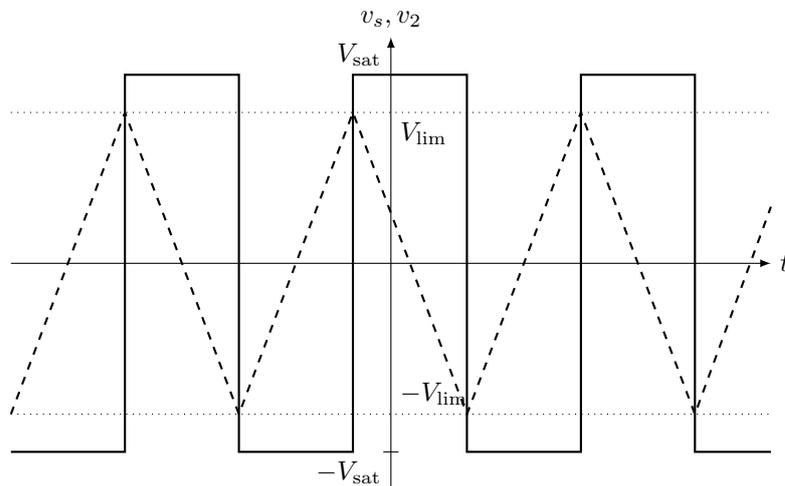
□ - 21. D'après la figure 8, on observe que  $v_s = v_e$ , on en déduit, d'après les questions précédentes :

$$v_1 = -\frac{R_2}{R_1} v_s \quad \text{soit} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{R_2}{R_1 R_2 RC} v_s$$

Lorsque  $v_s = +V_{\text{sat}}$ , alors  $v_2(t) = -\frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t + V_{\text{lim}}$ .

Lorsque  $v_s = -V_{\text{sat}}$ , alors  $v_2(t) = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} t - V_{\text{lim}}$ .

On en déduit le tracé suivant :



$v_2$  est visiblement une fonction triangulaire périodique du temps de même période que  $v_s$ . On en déduit donc que  $\frac{T}{2}$  est la durée pour passer de  $+V_{\text{lim}}$  à  $-V_{\text{lim}}$ .  
On pose  $t = 0$  tel que :

$$\begin{cases} v_2(0) = V_{\text{lim}} \\ v_2(\frac{T}{2}) = -V_{\text{lim}} \end{cases} \Rightarrow 2V_{\text{lim}} = v_2(0) - v_2\left(\frac{T}{2}\right) = V_{\text{lim}} + \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} \frac{T}{2} - V_{\text{lim}} \quad \text{d'après l'expression établie plus haut.}$$

On en déduit donc :

$$2V_{\text{lim}} = \frac{R_2}{R_1 RC} V_{\text{sat}} \frac{T}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{T = 4 \frac{R_3 R_1 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}}$$

□ - 22.  $T = \frac{1}{f}$  ( $f$  la fréquence du signal) donc :

$$C = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{4 R R_3 R_1 f} = \frac{R_3 + R_4}{4 R R_3 f}$$

L'application numérique donne :  $\boxed{C = 0,25 \mu\text{F}}$ .

La modification de la fréquence est possible en plaçant une résistance variable sur  $R$ . Ainsi, n'apparaissant que dans ce paramètre, il n'y a pas de compromis à trouver avec d'autres réglages apparemment.

D'après nos raisonnements précédents,  $E = V_{\text{lim}}$  :

$$E = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$$

Cette amplitude est modifiée à l'aide des résistances  $R_3$  et  $R_4$ .

Pour obtenir le rapport désiré, il faut :

$$0,22 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{R_3}{R_4} = 0,28}$$

On obtient alors  $\boxed{E = 4,23 \text{ V}}$

□ - 23. D'après le schéma :

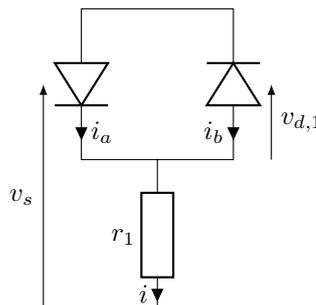
$$\left. \begin{array}{l} \frac{v_t(1/4)}{E} = 1 \\ \frac{v_t(0)}{E} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_t(\theta)}{E} = 4\theta$$

Ainsi :

$$\text{Pour } 0 \leq \frac{t}{T} \leq \frac{1}{4}, \quad \boxed{v_t(\theta) = 4\theta E}$$

□ - 24. Supposons que les deux diodes conduisent le courant simultanément. On en déduit donc que la tension à leurs bornes est à la fois **strictement** inférieure et égale à  $U_s > 0$ . Cette incohérence nous conduit donc à affirmer que l'une des deux seulement peut être passante.

Introduisons quelques notations :



Si l'une des deux diodes passe, alors  $u_{d,1} = U_s$  d'après l'énoncé et  $i_a = i > 0$  ou bien  $i_b = i > 0$ . Ainsi :

$$v_s = U_s + r_1 i \geq U_s \quad \text{avec } i > 0$$

Ce qui implique donc que si  $v_s \leq U_s$ , alors  $i = 0$ , le courant circulant dans  $r_1$  est donc bien nul.

Si  $v_s > U_s$ , alors le courant est non nul. On a donc :  $\boxed{U_s = U_1}$ .

□ - 25. Par un raisonnement similaire :  $v_s = 2U_s + r_2 i$  avec  $i > 0$ .

La valeur de  $U_2$  est donc :  $\boxed{U_2 = 2U_s}$ .

□ - 26. La tension maximale atteinte par la tension aux bornes d'une diode est  $U_s$  d'après l'énoncé. On en déduit donc, par additivité des tensions, que la tension maximale de la cellule (3) est de  $\boxed{V_{\max} = 3U_s}$ .

□ - 27. En  $\theta = 0$ ,  $s(\theta) \sim V_{\max} 2\pi\theta$ , or,  $v_t(\theta) = 4\theta E$ , on veut donc :

$$3U_s \times 2\pi = 4E \quad \text{soit} \quad \boxed{U_s = \frac{2E}{3\pi}}$$

On peut reformuler cela avec le rapport :

$$\boxed{\frac{E}{U_s} = \frac{3\pi}{2}}$$

On obtient bien une fraction de  $\pi$ .

□ - 28. Si  $v_s < U_1$ , alors  $i = 0$  et  $i_s = 0$  d'après l'énoncé. On en déduit donc que :

$$v_s = v_t = 4\theta E \quad (\text{aucun courant ne traverse } r_0)$$

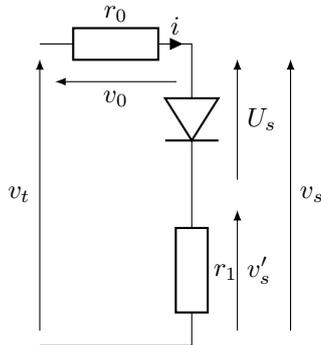
On cherche alors  $\theta_1$  tel que :

$$v_s(\theta_1) = U_1 \quad \text{soit} \quad 4\theta_1 E = U_1 = U_s$$

Ainsi :

$$\boxed{\theta_1 = \frac{U_s}{4E} = \frac{1}{6\pi}} \quad \text{d'après la condition précédemment établie}$$

□ - 29. Ici,  $U_1 < v_s < U_2$ , donc  $r_1$  est alimentée mais pas  $r_2$ . On a le montage suivant :



$$\left. \begin{array}{l} r_0 i = v_0 \\ r_1 i = v'_s = v_s - U_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_0}{r_0} = \frac{v_s - U_s}{r_1}$$

Ainsi :

$$v_0 = \frac{r_0}{r_1} (v_s - U_s)$$

D'après la loi des mailles :

$$v_t = v_0 + v_s = \left( \frac{r_0}{r_1} + 1 \right) v_s - U_s \frac{r_0}{r_1}$$

On en déduit donc :

$$v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1}}{1 + \frac{r_0}{r_1}} = \frac{v_t + U_s \rho_1}{1 + \rho_1} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_s = \frac{4\theta E + U_s \rho_1}{1 + \rho_1}}$$

Dérivons les expressions :

$$\frac{ds}{d\theta} = 3U_s \times 2\pi \cos(2\pi\theta) \quad \text{d'où} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \frac{ds}{d\theta} = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Et :

$$\frac{dv_s}{d\theta} = \frac{4E}{1 + \rho_1}$$

On en déduit, pour vérifier la relation indiquée dans l'énoncé :

$$\frac{4E}{1 + \rho_1} = 6U_s \pi \cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, on obtient :

$$\rho_1 = \frac{1}{\cos(\frac{1}{3})} - 1$$

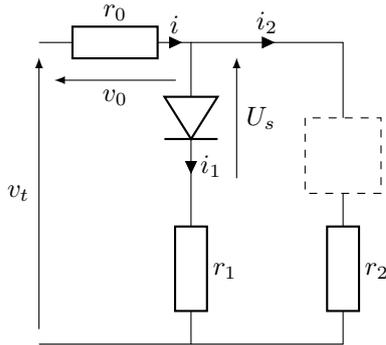
Compte-tenu de la définition de  $\theta_2$ , on peut écrire :

$$v_s(\theta_2) = U_2 = \frac{4\theta_2 E + \rho_1 U_s}{1 + \rho_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{U_s(2 + 2\rho_1 - \rho_1)}{4E} = (2 + \rho_1)\theta_1$$

On pose alors :  $\alpha = 2 + \rho_1$  soit  $\alpha = \frac{1}{\cos \frac{1}{3}} + 1$

□ - 30. Désormais, on a :  $U_s < v_s < 3U_s$ . Le circuit devient alors :

D'après la loi des nœuds,  $i = i_1 + i_2$ , ainsi, en utilisant la loi d'Ohm :



$$\frac{v_0}{r_0} = \frac{v_s - U_s}{r_1} + \frac{v_s - 2U_s}{r_2}$$

La loi des mailles donne :

$$v_t = v_0 + v_s = \frac{r_0}{r_1}(v_s - U_s) + \frac{r_0}{r_2}(v_s - 2U_s) + v_s$$

Ainsi, on obtient :

$$v_s = \frac{v_t + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}} = \frac{4E\theta + U_s \frac{r_0}{r_1} + 2 \frac{r_0}{r_2} U_s}{1 + \frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}}$$

□ - 31. Si  $\theta > \theta_3$ , comme  $v_s$  augmente et a atteint la valeur  $V_{\max}$ , sa valeur est bloquée à  $3U_1$ .

□ - 32. Les écarts peuvent être réduits en rajoutant des étapes. Ici, le système est constitué de 3 étages mais en rajoutant plusieurs (à 4 diodes, à 5 etc...), on peut affiner l'approximation du signal désiré.

## IV Exemple d'utilisation de ce capteur : un accéléromètre asservi

### IV.A - Première étude : le boîtier est immobile

□ - 33. L'inductance propre du circuit constitué du primaire et du noyau est constante et ne dépend pas de  $z$  tant que  $|z| < L_{\max}$ . On en déduit donc que l'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit ne dépend pas non plus de  $i$ . Ainsi, la force électromagnétique reçue par le noyau lors de son déplacement sera nulle (elle est obtenue en dérivant l'énergie par rapport à  $z$ ).

□ - 34. Le système étudié est la masse sismique dans le référentiel terrestre supposé galiléen d'origine  $O$ .

Cette masse est soumise à :

— La force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$  où  $\ell$  est la longueur du ressort.

— La force d'amortissement :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}(G) = -\lambda \dot{z}\vec{u}_z = -\lambda \dot{Z}\vec{u}_z$

— Son poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$  orthogonal au mouvement

Ici,  $\ell + D = Z$  avec  $D$  la moitié de la hauteur de la masse sismique. On a donc  $\vec{F} = -k(Z - D - \ell_0)\vec{u}_z$ .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse :

$$m \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = -k(Z - D - \ell_0)\vec{u}_z - \lambda \dot{Z}\vec{u}_z - mg\vec{u}_x$$

En projetant sur  $\vec{u}_z$ , on obtient :

$$m\ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + kZ = k(D + \ell_0)$$

□ - 35. À l'équilibre,  $\dot{Z} = \ddot{Z} = 0$ , on obtient alors :

$$kZ_0 = k(D + \ell_0) \quad \text{soit} \quad Z_0 = D + \ell_0$$

Or,  $z = 0$  si  $Z = D + \ell_0 = Z_0$ , donc :  $Z = z + Z_0$

□ - 36. Ici, le discriminant de l'équation établie ci-dessus est donné par :

$$\Delta = \lambda^2 - 4mk \quad \text{pour éviter les oscillations, le régime doit être apériodique, soit :}$$

$$\Delta > 0 \quad \text{soit} \quad \lambda^2 > 4mk \Rightarrow \boxed{\lambda > 2\sqrt{mk} = \lambda_{\min}}$$

#### IV.B - Étude simplifiée du boîtier mobile

□ - 37. La vitesse est donnée ainsi, par définition :

$$\vec{v}_{/O}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{d\vec{OO}_1}{dt} + \frac{d\vec{O}_1G}{dt} = \left( \frac{dZ_1}{dt} + \frac{dZ}{dt} \right) \vec{u}_z$$

On obtient donc :  $\boxed{v_G = v_1 + \frac{dZ}{dt}}$

L'accélération est donnée ainsi, par définition :

$$\vec{a}_{/O}(G) = \frac{d\vec{v}_{/O}(G)}{dt} = \frac{d^2Z_1}{dt^2} \vec{u}_z + \frac{d^2Z}{dt^2} \vec{u}_z$$

On obtient donc :  $\boxed{a_G = \gamma_1 + \frac{d^2Z}{dt^2}}$

□ - 38. Le système étudié est le même et le référentiel d'étude aussi. Le bilan des forces n'est pas modifié non plus.

En revanche, l'accélération considérée est désormais  $a_G \vec{u}_z$ . Ainsi, le principe fondamental de la dynamique donne, en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$ma_G = -\lambda \dot{Z} - k(Z - D - \ell_0)$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = -\gamma_1 + \frac{k}{m} Z_0}$$

À l'équilibre,  $\ddot{Z} = 0$  et  $\dot{Z} = 0$ , on en déduit donc que :

$$\frac{k}{m} Z'_0 = -\gamma_1 + \frac{k}{m} (D + \ell_0) \quad \text{soit} \quad \boxed{Z'_0 = Z_0 - \frac{m}{k} \gamma_1}$$

On en déduit donc :  $\boxed{z'_0 = -\frac{m}{k} \gamma_1}$ . La lecture de  $z'_0$  apporte donc une information proportionnelle à la valeur de  $\gamma_1$ .

□ - 39. Ce dispositif ajoute simplement une force proportionnelle à  $z = Z - Z_0$ . Le principe fondamental de la dynamique donne alors, en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m} \dot{Z} + \frac{k - \beta K_{s_o}}{m} Z = -\gamma_1 + \frac{k}{m} Z_0 - \beta K_{s_o} Z_0$$

On en déduit ainsi une équation sur  $z$  :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k - \beta K_{s_o}}{m} z = -\gamma_1}$$

À l'équilibre,  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$ , ainsi :

$$\boxed{z_{\text{éq}} = -\gamma_1 \frac{m}{k - \beta K_{s_o}}}$$

Connaissant  $\beta$  et  $K_{s_o}$  les paramètres du capteur ainsi que  $k$  et  $m$ , la mesure de  $V_{\text{out}}$  permet de remonter à la valeur de  $\gamma_1$ .

Pour que le régime transitoire soit le plus faible possible, il faut que le facteur de qualité soit proche de 0,7. Toutefois, ici, le facteur de qualité doit être inférieur à 0,5 pour que le régime soit apériodique.

Ici, au vu de l'équation différentielle, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k - \beta K_{s_o}}{m} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{\sqrt{\frac{k - \beta K_{s_o}}{m}}}{\frac{\lambda}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k - \beta K_{s_o}}{m}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{\sqrt{m(k - \beta K_{s_o})}}{\lambda} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k - \beta K_{s_o}}{m}} \end{array} \right.$$

On veut donc :

$$\boxed{\lambda = 2\sqrt{m(k - \beta K_{s_o})}}$$

Un accéléromètre cherche à mesurer une accélération relativement rapidement, il serait donc intéressant d'obtenir une réponse en une durée de l'ordre de la **milliseconde**.