Une brève histoire de la photographie

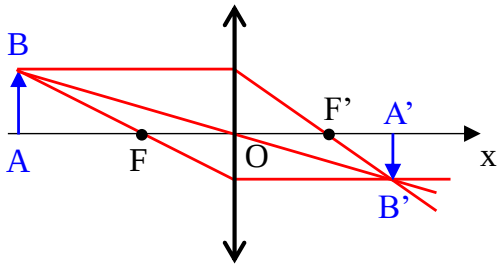
Partie I - Optique de l'appareil photo

I.1 - Objet et image

Q1a. Les conditions de Gauss sont remplies si tous les rayons incidents :
– sont proches de l'axe optique ;
– sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.
Les propriétés de stigmatisme et d'aplanétisme approchés sont alors vérifiées.

Q1b. Dans l'appareil photo modélisé figure 1, c'est le diaphragme qui permet d'assurer que les conditions de Gauss sont remplies.

Q2a. Pour placer A'B', les trois rayons incidents remarquables qu'on peut utiliser sont :
– le rayon incident passant par le centre optique O, qui n'est pas dévié ;
– le rayon incident parallèle à l'axe, qui donne un rayon émergent passant par le foyer image F' ;
– le rayon incident passant par le foyer objet F, qui donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique.



Q2b. D'après la relation fournie on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}\Leftrightarrow\overline{A'B'}=\overline{AB}\times\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}=\overline{AB}\times\frac{\overline{FO}}{\overline{OA}+\overline{FO}}\Leftrightarrow\overline{A'B'}=h\times\frac{f'}{-L+f'}$$

Comme $L\gg f'$ on peut faire l'approximation : $\boxed{\overline{A'B'}\approx-h\times\frac{f'}{L}}$

A.N. : $\overline{A'B'}\approx-5\times\frac{0,050}{20}\Rightarrow\boxed{\overline{A'B'}=-0,0125\text{ m}=-12,5\text{ mm}}$ (NB : h est donné avec un seul chiffre significatif, mais le sujet perd de son intérêt si on respecte cela ; on aurait alors : $\overline{A'B'}=-0,01\text{ m}=-1\text{ cm}$)

Q3a. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image ; on a alors : $\boxed{d=f'=50\text{ mm}}$.

Q3b. Partant d'un objet lointain (et donc d'une image réelle), plus l'objet se rapproche de l'objectif (L diminue), plus l'image s'en éloigne (d augmente). Comme d est majoré par d_{max}, alors L est minoré par la valeur L_{min} correspondante.
A noter que l'énoncé affirme qu'il est toujours possible de former une image pour $L>L_{min}$; ça n'est vrai que si $d_{min}\leq f'$, ce qui n'est pas spécifié.
NB : on peut également dans cette question exprimer d en fonction de L et montrer que $d\leq d_{max}$ entraîne $L\geq L_{min}$.

Q3c. Relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f'}\Leftrightarrow-\overline{OA}=\frac{\overline{OA'}\times f'}{\overline{OA'}-f'}\Leftrightarrow\boxed{L_{min}=\frac{d_{max}\times f'}{d_{max}-f'}}$

NB : l'objet étant réel, $\overline{OA}<0$ donc $L_{min}=-\overline{OA}$

Q3d. A.N. : $L_{min}=\frac{55\times50}{55-50}\Rightarrow\boxed{L_{min}=550\text{ mm}=0,55\text{ m}}$

I.2 - Influence de la focale

Q4a. On a toujours $L \gg f_1'$ d'où : $\overline{A'B'} \approx -5 \times \frac{0{,}100}{20} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B'} \approx -0{,}025\ \text{m} = -25\ \text{mm}}$

Q4b. On voit ainsi que l'image de l'arbre est plus grande que la dimension la plus petite du capteur ; on peut voir l'arbre en entier sur la photo uniquement en mode « portrait ».

Q5. L'image obtenue avec un téléobjectif de focale $f_1' = 2f'$ fait la même taille que celle obtenue avec f' pour une distance $L_1 = L/2$. En effet, tant que $L \gg f_1'$, on peut écrire :

$$\overline{A'B'} = h \times \frac{f_1'}{-L + f_1'} \approx h \times \frac{f_1'}{-L} = h \times \frac{2f'}{-L} = h \times \frac{f'}{-L/2}$$

C'est en ce sens qu'on peut dire incorrectement qu'un téléobjectif rapproche les objets.
La limite de cette affirmation est $f' \ll L_1 \Leftrightarrow f_1' \ll L$.

Q6a. Relation de conjugaison de Descartes pour (L_1) : $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \times f_1'}{\overline{O_1A} + f_1'}$

Avec $\left|\overline{O_1A}\right| \gg f_1'$ on a : $\overline{O_1A_1} \approx f_1'$; d'après la relation de Chasles on obtient ainsi :

$$\boxed{\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} \approx f_1' - e}$$

Q6b. Question plus difficile.
Une lentille divergente donne une image réelle (i.e. $\overline{O_2A'} > 0$) si et seulement si l'objet est situé entre le centre optique et le foyer objet. En effet, la relation de conjugaison de Descartes pour (L_2) donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \Leftrightarrow \overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \times f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'} \text{ donc } \overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1} \times f_2' > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f_2' > 0 \\ \text{ou } \overline{O_2A_1} \times f_2' < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f_2' < 0 \end{cases}$$

soit $\overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1} < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f_2' > 0 : \text{impossible (rappel : } f_2' < 0) \\ \text{ou } \overline{O_2A_1} > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} < -f_2' : A_1 \text{ entre O et } F_2 \end{cases}$

Ainsi pour que A'B' soit réelle, il est nécessaire que A_1 soit situé entre O et F_2, soit : $0 < \overline{O_2A_1} < -f_2'$; on en déduit : $0 < f_1' - e < -f_2' \Leftrightarrow \boxed{f_1' + f_2' < e < f_1'}$

Q6c. On a bien : $\boxed{f_1' + f_2' = 5\ \text{cm} < e = 8\ \text{cm} < f_1' = 10\ \text{cm}}$

Q7a. D'après ce qui précède : $\boxed{\overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \times f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'}}$ (NB : ici on n'a pas $\left|\overline{O_2A_1}\right| \gg f_2'$)

A.N. : avec $\overline{O_2A_1} \approx f_1' - e = 2\ \text{cm}$ on obtient : $\overline{O_2A'} = \frac{2 \times -5}{2 - 5} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2A'} = 3\ \text{cm}}$ (1 C.S…)

Q7b. D'après la formule du grandissement pour (L_1) et (L_2), on a : $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$ et $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$

D'où : $\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \times \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$ soit : $\boxed{\overline{A'B'} = -\frac{hf_1'f_2'}{L(f_1' - e + f_2')}}$

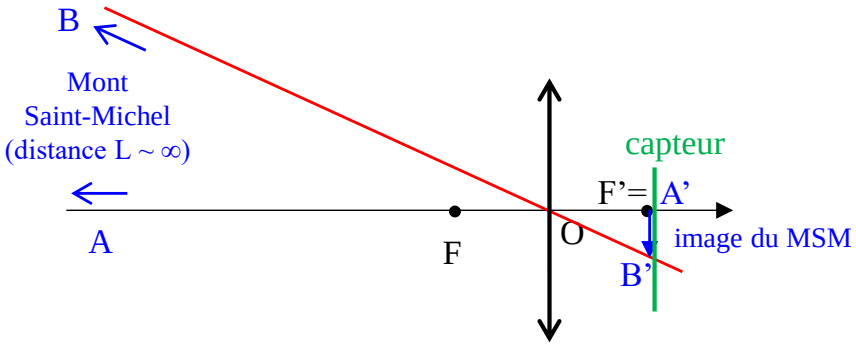
A.N.: $\overline{A'B'} = -\frac{5 \times 0{,}10 \times -0{,}05}{20 \times (0{,}10 - 0{,}08 - 0{,}05)} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B'} = -0{,}04\ \text{m} = -4\ \text{cm}}$

Q7c. Le téléobjectif constitué d'une lentille convergente et d'une lentille divergente produit ainsi une image de taille supérieure à celle produite par une simple lentille convergente.

I.3 - Exploitation d'une photo

Q8. D'après le document 1, le capteur utilisé (Canon G10) a une petite dimension de 5,7 mm ; et on voit que l'image du Mont Saint-Michel occupe environ tiers de cette dimension, plus précisément 3,55 cm sur une image de 10,15 cm de haut (mesuré à la règle) $\rightarrow \dfrac{3,55}{10,15} = 35,0\%$. L'image du Mont Saint-Michel sur le capteur a donc une taille de $5,7 \times 0,350 = 2,0$ mm.

Le document 2 indique que l'objectif est constitué d'une seule lentille convergente, de focale f' = 18 mm. Enfin d'après le document 3 on a $L = 1,46 \text{ km} \gg f'$.



On en déduit : $A'B' = \left|\overline{A'B'}\right| = h \times \dfrac{f'}{L} \Leftrightarrow \boxed{h = L \times \dfrac{A'B'}{f'}}$ (c'est en fait le théorème de Thalès)

A.N.: $h = 1460 \text{ m} \times \dfrac{2,0 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = 1460 \text{ m} \times 1,1 \Rightarrow \boxed{h = 1,6.10^{2} \text{ m}}$

(NB : la vraie hauteur du Mont Saint-Michel est de 157,10 m)

I.4 - Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

Q9a. Loi de la réfraction : $\boxed{n \sin(i) = \sin(r)}$

Q9b. On a : $OF' = OS + SF' = OS + CF' - CS = OS + CK + KF' - CS$

Or : $OS = e$; $CS = R$; $CK = R\cos(i)$ et $KF' = \dfrac{BK}{\tan(B\hat{F}'K)}$. Comme $B\hat{F}'K = r - i$ et $BK = R\sin(i)$

on a finalement : $OF' = e + R\cos(i) + \dfrac{R\sin(i)}{\tan(i-r)} - R$ soit : $\boxed{OF' = e - R(1-\cos(i)) + \dfrac{R\sin(i)}{\tan(i-r)}}$

Q10a. On voit que les rayons lumineux venant d'un point à l'infini sur l'axe optique et dont l'image est censée être le foyer image, croisent l'axe optique après la lentille en un point qui dépend de l'angle i, donc de la distance h à l'axe optique du rayon incident. La lentille n'est donc pas un système rigoureusement stigmatique.

Q10b. & Q10c. Si on se limite aux rayons paraxiaux (ce qui correspond à $i \ll 1$ et donc $r \ll 1$), on a : $\sin(i) \sim i$, $\cos(i) \sim 1 - \dfrac{i^2}{2}$ et $\tan(r-i) \sim r - i \sim (n-1)i$ d'après la loi de la réfraction.

Ainsi : $OF' \sim e - R\dfrac{i^2}{2} + \dfrac{Ri}{(n-1)i} \sim e + \dfrac{R}{n-1}$ au 1er ordre en i. Si par ailleurs $e \ll R$: $\boxed{OF' \sim \dfrac{R}{n-1}}$

OF' est maintenant indépendant de i et donc de h, la lentille est approximativement stigmatique.

Q11a. NB : petite coquille d'énoncé, il s'agit de R et non de r.

On a : $(OSF') = (OS) + (SF') = ne + SF' = ne + (f' - e) \Rightarrow \boxed{(OSF') = (n-1)e + \dfrac{R}{n-1}}$

Q11b. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde relatives à une source S sont orthogonales aux rayons lumineux issus de S. Une conséquence en est que lorsque deux points A et A' sont conjugués par un système optique, le chemin optique (AA') est le même le long de tous les rayons allant de A à A'. Ici, les rayons passant par O et par A sont sur la même surface d'onde et comme ils convergent en F', on en déduit que les chemins optiques jusqu'à F' sont égaux : $\boxed{(ABF') = (OSF')}$.

Partie II - La lumière

II.1 - Réglage de différents paramètres lors d'une prise de vue

Q12a. Si la prise de vue passe d'une ouverture de f/8 à une ouverture de f/4, d'après le document 4 cela signifie que la surface du diaphragme lorsqu'il est ouvert a été multipliée par 4. Pour conserver la même exposition, il faut donc diviser par 4 la vitesse d'obturation, qui passe de $1/250\,\text{s}$ à $\boxed{1/1000\,\text{s}}$

Q12b. D'après le document 4, comme l'ouverture augmente, la profondeur de champ diminue.

Q12c. Le diaphragme restant ouvert moins longtemps, le risque de « bougé » est moins important.

II.2 - Modèle corpusculaire

Q13. Relation de Planck-Einstein : $\boxed{E_\gamma = h\nu}$ avec : E_γ l'énergie d'un photon en J
ν la fréquence de l'onde lumineuse en Hz
$h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s la constante de Planck

Q14. L'éclairement vaut $E_{cl} = 700\,\text{W.m}^{-2}$, on en déduit la puissance lumineuse traversant le diaphragme de surface $S = \pi\dfrac{d^2}{4}$: $P = E_{cl}S = \dfrac{\pi}{4}E_{cl}d^2$ puis l'énergie traversant le diaphragme pendant sa durée d'ouverture $\tau = 1/500\,\text{s}$: $E = \dfrac{\pi}{4}E_{cl}d^2\tau$.

Le nombre de photons pénétrant l'appareil pendant cette durée s'obtient en divisant l'énergie incidente par l'énergie d'un photon : $\boxed{N = \dfrac{E}{E_\gamma} = \dfrac{\pi E_{cl}d^2\tau}{4h\nu}}$

A.N. : $N = \dfrac{E}{E_\gamma} = \dfrac{\pi \times 700 \times \left(5.10^{-3}\right)^2}{4 \times 6{,}63.10^{-34} \times 5.10^{14} \times 500}$; avec $\dfrac{7}{6{,}63} \approx 1$ et $5\pi \approx 16$ on obtient : $\boxed{N = 8.10^{13}}$

Partie III - Le capteur

Q15. C'est l'effet photoélectrique., interprété par Albert Einstein en 1905 (NB : il recevra le prix Nobel de physique en 1921 pour cette interprétation).

Q16. Pour un photon on a : $E_\gamma = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$; or le domaine visible correspond à $400\,\text{nm} \le \lambda \le 800\,\text{nm}$;

on a donc : $E_\gamma \ge \dfrac{6{,}63.10^{-34} \times 3{,}0.10^8}{8{,}0.10^{-7}} \approx \dfrac{20.10^{-26}}{8{,}0.10^{-7}} \Rightarrow \boxed{E_\gamma \ge 2{,}5.10^{-19}\,\text{J}}$

Or l'énergie minimale pour le silicium est de $\boxed{E_{Si} = 1{,}12\,\text{eV} = 1{,}8.10^{-19}\,\text{J}}$; on a bien $\boxed{E_\gamma > E_{Si}}$ donc l'effet photoélectrique est a priori possible sur le silicium avec toute la lumière visible.

Partie IV - Le flash

IV.1 - Utilisation d'un flash

Q17. On applique la formule du document 7 : $\text{portée} = \dfrac{12\times 2}{11} \Rightarrow \boxed{\text{portée} = 2\text{ m}}$

Q18. D'après le document 5, l'obturateur de durée d'ouverture la plus courte reste ouvert 1/1000 s. Pendant cette durée, la lumière parcourt néanmoins la distance $d = c\times t = \dfrac{3.10^8}{10^3} \Rightarrow$ $\boxed{d = 3.10^4\text{ m} = 300\text{ km}}$! On voit ainsi que l'interprétation 1) est erronée, la portée n'a rien à voir avec la distance parcourue par la lumière.

A contrario, la puissance émise par le flash se répartit sur une coquille sphérique de rayon d donc la puissance surfacique reçue varie comme $1/d^2$ (et même $1/4d^2$ en tenant compte de l'aller-retour de la lumière). Cette décroissance rapide limite l'apport d'intensité lumineuse supplémentaire due au flash, et donc sa portée.

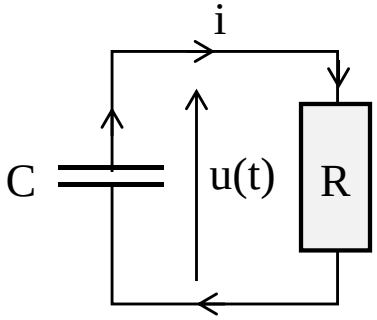
IV.2 - Principe de fonctionnement d'un flash

Q19. L'énergie stockée par un condensateur chargé sous une tension U_0 s'écrit : $E_C = \dfrac{1}{2}CU_0^2$

D'où : $\boxed{U_0 = \sqrt{\dfrac{2E_C}{C}}}$. A.N.: $U_0 = \sqrt{\dfrac{2\times 10}{200\times 10^{-6}}} = \sqrt{10^5} \Rightarrow \boxed{U_0 = 3.10^2\text{ V}}$

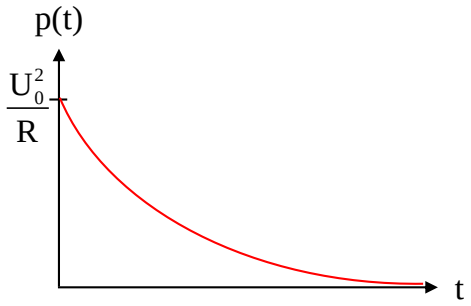
Cette tension est bien supérieure à la f.e.m. de la pile, ce qui suppose un dispositif permettant de transformer la f.e.m. de 9 V en U_0.

Q20a. Loi d'Ohm : $u = Ri$; loi du condensateur : $i = -C\dfrac{du}{dt}$ (convention générateur); on obtient : $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{RC} = 0$ de la forme : $\boxed{\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = RC}$ et on en déduit : $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$



Q20b. La puissance instantanée reçue par le tube s'écrit : $p(t) = u(t)i(t)$ soit : $p(t) = \dfrac{u^2(t)}{R}$. Ainsi : $\boxed{p(t) = \dfrac{U_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}}$

Q20c.



Q21. L'énergie reçue pendant une durée Δt s'écrit : $E = \int_0^{\Delta t} p(t)\,dt$

Or ici : $\tau = RC = 2.10^{-4}$ s et $\Delta t = \dfrac{1}{200} = 5.10^{-3}\text{ s} = 25\tau$; comme $e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} = e^{-50} \approx 0$ on peut considérer sans calcul supplémentaire que toute l'énergie stockée a été restituée.

Partie V - Le stabilisateur d'image

V.1 - Étude d'un oscillateur mécanique

Q22. Système = {plaque} ; référentiel : terrestre galiléen ; Bilan des forces s'exerçant sur le système :
– poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_x}$;
– force de rappel $\vec{F} = -k\left(x - \ell_0\right)\vec{e_x}$.

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ soit après projection sur Ox : $mg - k\left(x_{eq} - \ell_0\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$

Q23a. La boîte subissant une accélération, elle constitue un référentiel non galiléen.

Q23b. Aux deux forces déjà citées, il faut ajouter :
– la force de frottements visqueux : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{dx}{dt}\vec{e_x}$;
– la force d'inertie d'entrainement : $\vec{F_{ie}} = -ma(t)\vec{e_x}$.

NB :il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis puisque le référentiel de la boîte est en translation.
Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen de la boîte donne :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{F_{ie}} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x}}$$

Q24. Après projection sur Ox on a : $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\left(x - \ell_0\right) - \alpha\frac{dx}{dt} - ma(t)$

$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq} - a(t)$ de la forme : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$ et $\boxed{f(t) = \omega_0^2 x_{eq} - a(t)}$

Q25a. Question plus difficile.
Il y a une coquille d'énoncé dans l'expression de X_m, le premier ω_0 est au carré. Cela se voit pour des raisons dimensionnelles ; on peut retrouver également l'expression de X_m (on a de toute façon besoin de l'expression de ϕ pour montrer que $\phi \to 0$ ou $\phi \to \pm\pi$).

On pose : $X(t) = x(t) - x_{eq} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$; alors : $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = -A_m\cos(\omega t)$

Passage en complexe : $-\omega^2\underline{X} + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = -A_m e^{j\omega t} \Leftrightarrow \underline{X}(t) = \frac{A_m}{\omega^2 - \omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}}e^{j\omega t} = \underline{X}e^{j\omega t}$

On a bien : $X_m = |\underline{X}| = \frac{A_m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$ et aussi : $\phi = \arg(\underline{X}) = -\arg\left(\omega^2 - \omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$

Alors si $\boxed{\omega \ll \omega_0}$ et $\boxed{\frac{\omega}{Q} \ll \omega_0}$, on a : $X_m \sim \frac{A_m}{\omega_0^2}$ et $\phi \sim -\arg\left(-\omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) + \pi \sim \pi$

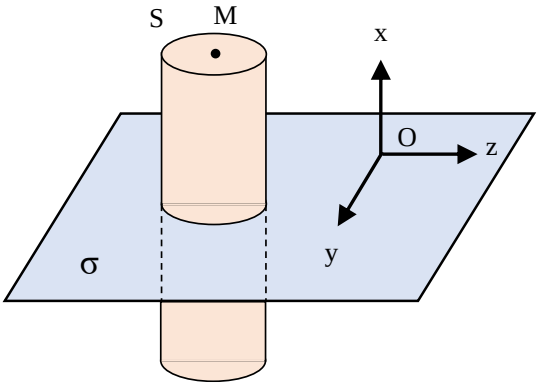
Ainsi, $\underline{X}(t) \sim \frac{A_m}{\omega_0^2}e^{j(\omega t + \pi)} = -\frac{A_m}{\omega_0^2}e^{j\omega t}$ et $X(t) \sim -\frac{A_m}{\omega_0^2}\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{X(t) \sim -\frac{a(t)}{\omega_0^2}}$

Q25b. On a donc dans ce domaine de fréquences : $\boxed{X(t) \sim -\frac{m}{k}a(t)}$

Q26. D'après le document 8, les fréquences de résonance du bras, du poignet et des doigts sont telles que $\nu \leq 30\ \text{Hz} \Leftrightarrow \omega = 2\pi\nu \leq 1{,}9.10^{2}\ \text{rad.s}^{-1}$.

Or d'après l'énoncé, $\omega_0 = 5.10^{3}\ \text{rad.s}^{-1}$; on a donc bien : $\boxed{\omega \ll \omega_0}$ (et $\dfrac{\omega}{Q} \ll \omega_0$ puisque $Q > 1$)

V.2 - Étude d'un condensateur plan



Q27a. Le plan parallèle à Oxz passant par M ainsi que le plan parallèle à Oxy passant par M sont tous les deux plans de symétrie de la distribution de charge ; le champ $\vec{E}(M)$ appartient donc à ces deux plans, ce qui signifie qu'il est selon Ox : $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_x}}$.

Par ailleurs on sait que le champ électrostatique s'éloigne des charges positives, on en déduit que le champ est $\boxed{\text{selon } +\vec{e_x} \text{ pour } x > 0 \text{ et selon } -\vec{e_x} \text{ pour } x < 0}$.

Enfin, la distribution de charges est invariante par translation selon Oy et selon Oz, donc d'après le principe de Curie, le champ ne dépend ni de y ni de z : $\boxed{\vec{E}(M) = E(x)\vec{e_x}}$

Q27b. Surface de Gauss : on prend un cylindre de section S quelconque et de hauteur 2x, i.e. allant de M au point M' symétrique de M par rapport au plan chargé.

Calcul du flux : $\oiint_{\text{cylindre}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{\substack{\text{disque}\\\text{haut}}} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{\substack{\text{surface}\\\text{latérale}}} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{\substack{\text{disque}\\\text{bas}}} \vec{E}\cdot\vec{dS}$; or $\iint_{\substack{\text{surface}\\\text{latérale}}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$ puisque dS est alors orthogonal à la surface et $\vec{E}$ parallèle.

Ainsi : $\oiint_{\text{cylindre}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{\substack{\text{disque}\\\text{haut}}} E(x)\vec{e_x}\cdot dydz\vec{e_x} + \iint_{\substack{\text{disque}\\\text{bas}}} E(-x)\vec{e_x}\cdot dydz\left(-\vec{e_x}\right) = E(x)S - E(-x)S$

Or le plan chargé est évidemment plan de symétrie des charges donc le champ en M' est le symétrique de celui en M : $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \Rightarrow E(-x) = -E(x)$.

On a donc finalement : $\oiint_{\text{cylindre}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 2E(x)S$

Théorème de Gauss : $\oiint_{\text{cylindre}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$; ainsi : $\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x} \text{ si } x < 0 \end{cases}}$ (indépendant de x)

Q28a. On a donc : $\vec{E}_A = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$ et $\vec{E}_B = -\dfrac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{e_x} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$

D'après le principe de superposition, $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_x}}$

Pour $x < 0$ on a : $\vec{E}_A = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$ et $\vec{E}_B = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$ donc $\vec{E} = \vec{0}$

et pour $x > 0$ on a : $\vec{E}_A = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$ et $\vec{E}_B = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}$ donc $\vec{E} = \vec{0}$; finalement : $\boxed{\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}}$

Q28b. On utilise la relation entre champ et potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$; comme $\vec{E}$ est selon $\vec{e_x}$ alors V ne dépend que de x et $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \dfrac{dV}{dx}\vec{e_x}$. Après projection on obtient donc pour le potentiel entre les plaques : $\dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(x) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}x + c^{te}$.

Finalement : $U_{AB} = V_A - V_B = V(0) - V(e) \Rightarrow \boxed{U_{AB} = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0}}$

Q29a. Un condensateur soumis à une tension U voit ses armatures accumuler une charge $\pm Q$, où Q est proportionnelle à U ; le facteur de proportionnalité est la capacité C du condensateur : $\boxed{Q = CU}$.

On a donc : $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\sigma S}{\sigma e/\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{S\varepsilon_0}{e}}$

Q29b. La capacité d'un condensateur s'exprime en Farad F. On voit que l'expression précédente est dimensionnellement correcte puisque ε_0 est en $F.m^{-1}$, S en m^2 et e en m.

V.3 - Application à la mesure d'une accélération

Q30. La distance entre les armatures est d'après l'énoncé : $e + X(t)$ avec toujours $X(t) = x(t) - x_{eq}$

Ainsi on a : $U(t) = \dfrac{\sigma(e + X(t))}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{U(t) = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}(e + X(t))}$. Comme X(t) est proportionnel à a(t), on voit qu'il y a une relation linéaire entre U(t) mesurée et a(t) : $\boxed{U(t) \sim \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}\left(e - \dfrac{m}{k}a(t)\right)}$

Partie VI - Le filtre polarisant

VI.1 - Rayonnement d'un dipôle oscillant

Q31a. On a par définition : $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{AB}}$, le dipôle étant orienté de la charge négative vers la charge positive. Un dipôle électrique s'exprime en C.m.

Q31b. La taille caractéristique de l'échelle atomique/moléculaire est $d \sim 10^{-10}$ m ; l'échelle des charges en jeu est celle de la charge élémentaire, souvent moins : $q \sim 10^{-19} - 10^{-20}$ C.

Ainsi : $\boxed{p = qd \sim 10^{-29} - 10^{-30}\ \text{C.m}}$.

Q32. L'approximation dipolaire consiste à se placer à une distance r grande devant la taille du dipôle d : $\boxed{r \gg d}$; elle permet de prendre en compte comme source des champs le dipôle et non les charges individuelles.

L'hypothèse non-relativiste consiste à considérer que le mouvement de la charge mobile constituant le dipôle n'est pas relativiste, ce qui revient à considérer que le dipôle oscille « en bloc » et qu'il n'y a pas de phénomène de propagation interne ; cette hypothèse se traduit par l'inégalité : $\boxed{\lambda \gg d}$ où $\lambda = cT$ est la longueur d'onde associée à la période d'oscillation T du moment dipolaire.

Enfin se placer dans la zone de rayonnement consiste à considérer qu'on est à une distance r grande devant λ, longueur d'onde du mouvement dipolaire : $\boxed{r \gg \lambda}$ (on a donc ici : $r \gg \lambda \gg d$).

Q33a. La puissance surfacique rayonnée est la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting : $P = \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle = \left\langle \left\| \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\| \right\rangle$; or : $\vec{E} \wedge \vec{B} = \left(\frac{\mu_0 p_0}{4\pi} \right)^2 \frac{\omega^4}{r^2 c} \sin^2(\theta) \cos^2(\omega t - kr) \vec{e_r}$ d'où :

$$P = \left\langle \mu_0 \left(\frac{p_0}{4\pi} \right)^2 \frac{\omega^4}{r^2 c} \sin^2(\theta) \cos^2(\omega t - kr) \right\rangle \Rightarrow \boxed{P = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \omega^4 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}}$$

Q33b. On a donc : $\boxed{K = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c}}$

Q34. P dépend de $\sin^2(\theta)$ donc le rayonnement est anisotrope.

La puissance surfacique rayonnée est maximale pour $\sin^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ (rappel : $\theta \in [0, \pi]$), c'est-à-dire dans le plan Oxy.

Q35a. Soit la sphère de rayon r centrée sur O. La puissance rayonnée à travers la sphère vaut :

$$\mathcal{P}_{tot} = \iint_S P dS = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \omega^4 \iint_S \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \times r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \omega^4 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{tot} = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4}$$

Q35b. Le fait que $\mathcal{P}_{tot}$ ne dépende pas de r traduit la conservation de l'énergie. C'est la même quantité d'énergie (donc de puissance) qui se répartit sur des surfaces sphériques de plus en plus grandes, d'où la décroissance de P en $1/r^2$.

Q36. La taille des molécules de diazote et de dioxygène est de l'ordre de $d \sim 10^{-10}$ m. Or les longueurs d'onde de la lumière visible sont supérieures à $\lambda = 400 \text{ nm} = 4.10^{-7}$ m. On a bien : $\boxed{d \ll \lambda}$

VI.2 - Utilisation d'un filtre polarisant pour augmenter la saturation du bleu du ciel

Q37. D'après la figure 7, les rayons du soleil se propagent dans la direction Ox ; la lumière perçue par le photographe selon Oy est donc uniquement de la lumière diffusée.

Or d'après la question Q35, la puissance rayonnée par les dipôles varie comme ω^4 ; sachant que la lumière solaire a dans le visible une densité spectrale à peu près constante, la puissance rayonnée par les molécules va être $2^4 = 16$ fois plus importante dans le violet que dans le rouge ($\frac{\omega_{violet}}{\omega_{rouge}} = \frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{violet}} = \frac{800 \text{ nm}}{400 \text{ nm}} = 2$). L'œil étant peu sensible au violet, on perçoit le ciel comme bleu.

Q38a. Le champ électromagnétique étant transverse dans le ciel, le champ électrique de la lumière solaire arrivant sur l'axe Oy appartient au plan Oyz. Les molécules de l'atmosphère vont donc être polarisée dans les directions du plan Oyz.

D'après Q34, la diffusion est nulle dans la direction du dipôle, et maximale dans le plan orthogonal à cette direction. La composante p_y d'un dipôle ne contribue donc pas à la lumière reçue par le photographe, celle-ci est de la lumière diffusée produite par les dipôles orientés selon Oz.

Le champ électrique rayonné est alors orienté selon $\vec{e_\theta}$, qui s'identifie à $-\vec{e_z}$ dans cette configuration. Ainsi, le champ électrique gardant une orientation constante, la lumière est polarisée rectilignement.

Q38b. L'utilisation du polariseur permet de sélectionner la lumière diffusée par rapport à la lumière incidente, et donc d'enrichir la lumière perçue en fréquences élevées (bleu) par rapport aux fréquences plus faibles (rouges).

Q38c. Lorsqu'on se trouve à 90° par rapport à la direction du Soleil, comme sur la figure 7, la lumière perçue provient exclusivement des dipôles orientés selon Oz (et elle est polarisée selon Oz).

Si on se place dans une autre configuration géométrique, une partie de la lumière perçue provient des dipôles orientés selon Oy, qui produiront une lumière polarisée selon Oy. Ainsi, il ne sera pas possible de garder toute la lumière polarisée (et donc enrichie en bleue) avec le polariseur et l'effet sera moins marqué que si on est à 90° par rapport à la direction du Soleil.

Q38d. Le champ électrique émergent étant la projection sur l'axe de polarisation du champ électrique incident, l'intensité lumineuse transmise est toujours inférieure ou égale à l'intensité lumineuse incidente (loi de Malus). Par ailleurs, dans les polariseurs réels, il y a des pertes par réflexion/absorption, même si la lumière incidente est entièrement polarisée dans la direction de polarisation.

Partie VII - Traitement numérique des images

Q39. On a : $\text{taille} = 2592 \times 1936 \approx 2600 \times 1900 \Rightarrow \boxed{\text{taille} \sim 5.10^6 \text{ pixels / octets}}$ (1 octet par pixel)

Q40. expression 1 : ligne (pour pouvoir boucler sur toutes les lignes)

expression 2 : colonne (pour pouvoir boucler sur toutes les colonnes)

expression 3 : pixel = 255 – pixel (chaque pixel se voit associé son négatif ; ainsi un pixel noir (pixel = 0) devient blanc (pixel = 255), et réciproquement)

expression 4 : nouvelleImage.putpixel((j,i),pixel) (on remplace dans l'image le pixel par son négatif)

Q41. On a : expression 5 : liste_y[p] = liste_y[p] + 1 (on rajoute 1 dans la colonne de l'histogramme correspondant à la valeur du pixel p). NB : on peut aussi écrire : liste_y[p] += 1.

Q42. Le passage au négatif correspond à changer 0 en 255, 255 en 0, et de manière générale p en 255 – p. Cela correspond pour l'histogramme à une symétrie par rapport à l'axe p = 127 (ou entre p = 127 et p = 128).
On en déduit que l'histogramme correspondant au négatif de l'image est le 12b.