

Correction DM – Vacances Toussaint 2025 5/2

Partie I : Cycle de Rankine

I Thermodynamique : étude du cycle de Rankine

Extrait de CCP TSI 2012.

1. Voir document 1. *p.2*

2. Pour le point 3 : on connaît $T_3 = 500^\circ\text{C}$, et on sait en plus que l'évolution 2→3 est isobare, donc $p_3 = p_2 = 50 \text{ bar}$. Ceci permet de placer le point 3. *→ 1*

Pour tracer toute l'évolution 2→3, on suit l'isobare $p = 50 \text{ bar}$. *→ 1*

Pour le point 4, on sait que 3→4 est isentropique. En partant de l'état 3 sur le diagramme, on doit descendre en ligne droite. On s'arrête lorsqu'on est à la température T_1 , car on sait qu'on doit ensuite aller de 4 à 1 à l'aide d'un changement d'état isobare isotherme. *→ 1*

3. On lit : $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $h_3 \simeq 3.5 \times 10^3 \text{ kJ/kg}$, $h_4 = 2.6 \times 10^3 \text{ kJ/kg}$, $s_4 = 7.0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $s_v(T_1) = 7.38 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $s_l(T_1) = 1.35 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. *6x0,5*

4. L'entropie massique étant une grandeur extensive, on a : $s_4 = x_4 s_v(T_4) + (1 - x_4) s_l(T_4)$ (x_4 est le titre vapeur, $1 - x_4$ est le titre en liquide). Comme $T_4 = T_1$, on a aussi $s_4 = x_4 s_v(T_1) + (1 - x_4) s_l(T_1)$. On en déduit

$$x_4 = \frac{s_4 - s_l(T_1)}{s_v(T_1) - s_l(T_1)}, \quad \text{d'où } x_4 = 0.94.$$

5. On est en régime stationnaire. On applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans le GV} entre les états 2 et 3 : $\Delta h = q_{\text{GV}} + w_i$. *← 0,5*

On a négligé Δe_c et $\Delta(gz)$. De plus il n'y a pas de parties mobiles, donc $w_i = 0$.

Donc

$$q_{\text{GV}} = h_3 - h_2, \quad \text{soit } q_{\text{GV}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kJ/kg.}$$

Ce transfert thermique est positif car le fluide reçoit effectivement un apport de chaleur lorsqu'il traverse la chaudière. *) 1*

6. De même pour le condenseur, on a

$$q_{\text{cond}} = h_1 - h_4 = -2.2 \times 10^3 \text{ kJ/kg.}$$

Ce transfert thermique est négatif car le fluide se liquéfie dans le condenseur, il cède donc un transfert thermique positif au milieu extérieur. *) 1*

7. Système (fermé) : masse m de fluide caloporteur en circulation dans la machine thermique.

Transformation : un cycle.

On applique le premier principe sur un cycle au fluide caloporteur : $\Delta U = W + Q$. *0,5*

On a $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état et il s'agit d'un cycle. On a $Q = Q_{\text{GV}} + Q_{\text{cond}}$ car dans les autres étapes il n'y a pas d'échange d'énergie thermique. *0,5*

Comme par définition $Q_{\text{GV}} = m q_{\text{GV}}$ et $Q_{\text{cond}} = m q_{\text{cond}}$, on en déduit finalement

$$W = -m(q_{\text{GV}} + q_{\text{cond}}).$$

8. Le rendement η du cycle est $\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}}$. 0,5

- La grandeur utile est le travail récupéré au cours du cycle : $-W$ (W est reçu par le fluide, donc négatif pour un moteur).

- La grandeur coûteuse est la chaleur que l'on fournit dans le GV (c'est là que l'on chauffe pour faire fonctionner la machine) : Q_{GV} .

(2) $\text{Donc } \eta = \frac{-W}{Q_{GV}} = \frac{m(q_{GV} + q_{cond})}{Q_{GV}}$, 0,5

d'où $\eta = 1 + \frac{q_{cond}}{q_{GV}}$, soit $\eta = 0.3$. 0,5

9. Si on estime que le sous-marin a besoin d'une puissance motrice $|\mathcal{P}| = 60 \text{ MW}$ sur l'arbre en sortie de la turbine, alors la puissance thermique apportée par le réacteur nucléaire doit être

(1) $P_{GV} = \frac{|\mathcal{P}|}{\eta} = 0.2 \text{ GW}$. 0,5

10. ★ On est en régime stationnaire. On applique le premier principe au système ouvert {fluide en écoulement dans la pompe} entre les états 1 et 2 : $\Delta h = q_{pompe} + w_{i,pompe}$. 0,5

On a négligé Δe_c et $\Delta(gz)$. De plus il n'y a pas de parties mobiles, donc $w_i = 0$.

La pompe est supposée parfaitement calorifugée, donc $q_{pompe} = 0$.

Donc

$w_{i,pompe} = h_2 - h_1$, soit $w_{i,pompe} = 35 \text{ kJ/kg}$. 0,5

Ce travail est positif : le fluide reçoit effectivement un travail lorsqu'il est comprimé.

★ De même pour la turbine :

$w_{i,turb} = h_4 - h_3$, soit $w_{i,turb} = -9 \times 10^2 \text{ kJ/kg}$. 0,5

Ce travail est négatif, c'est en fait que le fluide cède un travail au milieu extérieur lors de cette étape (ce qui est justement le rôle d'une turbine).

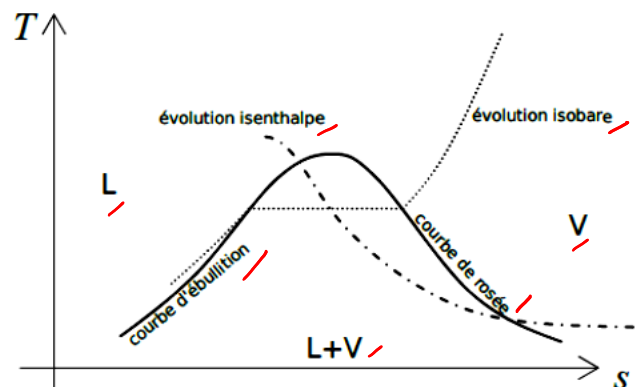
★ La pompe étant alimentée par la turbine, le travail net vers le milieu extérieur, que l'on récupère sur l'arbre moteur, est donc $w_{net} = |w_{i,turb}| - |w_{i,pompe}|$. 0,5

Soit, étant donné les signes : $w_{net} = -w_{i,turb} - w_{i,pompe}$. 0,5

A.N. : $w_{net} = 865 \text{ kJ/kg}$. 0,5

On remarque que le travail nécessaire au fonctionnement de la pompe est négligeable devant celui produit par la turbine. C'est toujours le cas dans ce type de cycle à vapeur, car la compression d'un liquide demande peu de travail en comparaison de celui récupéré lors de la détente d'une vapeur.

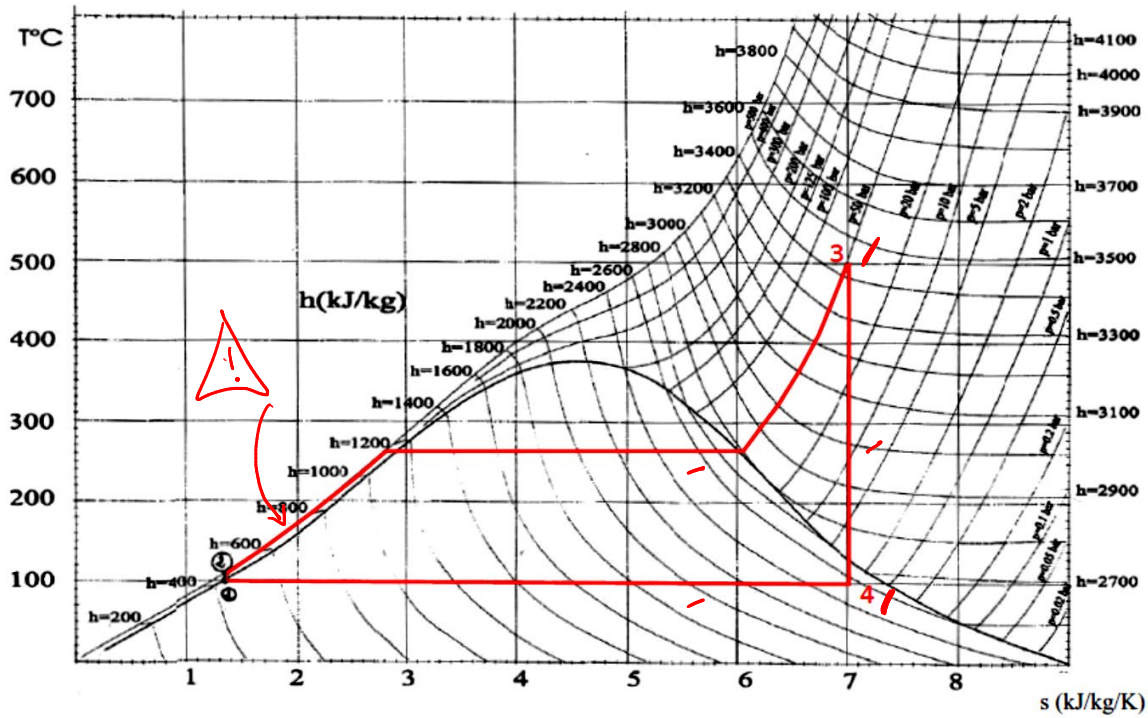
★ On a $\mathcal{P} = D_m w_{net}$, le débit massique doit donc être $D_m = \frac{\mathcal{P}}{w_{net}} = 69 \text{ kg/s}$. 0,5



(doc. 1)

7 x 0,5

Diagramme T- S de l'eau



(doc. 2) Tracé du cycle sur le diagramme T-s.

Partie II : Chauffage d'une habitation

I Machines thermiques et principes de la thermodynamique

1 - Moteur : $W < 0, Q_C > 0, Q_F < 0.$ 1

Réfrigérateur et PAC : $W > 0, Q_C < 0, Q_F > 0.$ 1

On rappelle que W, Q_F et Q_C sont définis comme étant reçu par le fluide qui circule dans la machine. convention $\Delta\theta$

2 - $\eta = \frac{-W}{Q_C}, e_{RF} = \frac{Q_F}{W}, e_{RF} = \frac{-Q_C}{W}.$ 3 x 0,5

3 - a - Système (fermé) : la machine.

Transformation : évolution au cours d'un cycle.

Lors de cette transformation cyclique, la variation des grandeurs d'état est nulle : $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0.$ cycle 0,5

Le premier principe s'écrit donc :

$$W + Q_C + Q_F = \Delta U = 0.$$

Et le second principe : $S_e + S_c = \Delta S = 0$. On a en plus $S_c = 0$ car l'évolution est réversible. 0,5

Les transferts thermiques ayant lieu au contact de thermostats, on a $S_e = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$. On obtient donc :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0.$$

b - En utilisant et manipulant les deux relations précédentes, on arrive aux expressions du rendement et des efficacités réversibles :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}, e_{RF} = \frac{T_F}{T_C - T_F}, e_{PAC} = \frac{T_C}{T_C - T_F}.$$

4 - a - On a cette fois

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + \sigma = 0.$$

b - On a $\eta = \frac{-W}{Q_C} = \frac{Q_F + Q_C}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}.$

Or le second principe que l'on vient d'écrire indique que $\frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_F}{T_C} - \frac{\sigma T_F}{Q_C}.$ démo : 1

On a donc $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{\sigma T_F}{Q_C}$, soit : $\eta = \eta_C - \frac{\sigma T_F}{Q_C}.$ 0,5

L'entropie créée étant positive, et Q_C également pour un moteur, on a $\eta \leq \eta_C$, avec égalité uniquement en cas d'évolution réversible. 0,5

c - D'après les données, on peut calculer $\eta = r \times \eta_C$. On connaît également W . 0,5

★ En utilisant la définition $\eta = \frac{-W}{Q_C}$, on en déduit $Q_C = -W/\eta = 19.9 \text{ kJ/cycle}.$ 0,5

★ On utilise ensuite $W + Q_F + Q_C = 0$, d'où $Q_F = -W - Q_C = -4.9 \text{ kJ/cycle}.$ 0,5

★ L'entropie créée est alors $\sigma = (\eta_C - \eta) \frac{Q_C}{T_F} = 3.3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}/\text{cycle}.$ 0,5

II Chauffage d'une habitation

5 - L'énergie à fournir pendant $t =$ une heure est $E = \Phi_{th} \times t$.

La masse de bois correspondante vérifie $m_B \times q_B = E = \Phi_{th} \times t$.

On a donc $m_B = \Phi_{th} \times t / q_B = 2.4 \text{ kg}$.

6 - a - D'après la partie I, $e_1 = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 15$, car ici $T_C = T = 293 \text{ K}$ et $T_F = T_E = 273 \text{ K}$ (attention à bien prendre les températures en Kelvin).

b - La puissance à fournir à la PAC est donc $P = \Phi_{th} / e_1 = 0.82 \text{ kW}$ (on suppose que toute la puissance électrique fournie au compresseur de la PAC est transmise au fluide).

7 - a - On a $Q_C = Q > 0$, $Q_F < 0$, $Q'_C < 0$, $Q'_F > 0$ et $W > 0$ (s'aider de la partie I si besoin).

b - Par définition, $Q_H = -Q_F - Q'_C$. Il faut exprimer chacun des deux termes.

★ Le rendement du moteur est $\eta = \frac{W}{Q}$, l'efficacité de la PAC est $e_{PAC} = \frac{-Q'_C}{W}$. On a donc

$\eta \times e_{PAC} = -\frac{Q'_C}{Q}$, et donc $-Q'_C = Q \eta \times e_{PAC}$.

On exprimera plus tard η et e_{PAC} en fonction des températures (possible car le fonctionnement est réversible).

★ D'autre part, $\eta = \frac{Q_F + Q_C}{Q_C} = \frac{Q + Q_C}{Q}$, donc on a $Q_F = Q(\eta - 1)$.

★ Finalement, $Q_H = Q \eta e_{PAC} + Q(1 - \eta)$. On utilise ensuite $e_1 = \frac{T_H}{T_H - T_E}$ et $\eta = 1 - \frac{T_H}{T}$. Après quelques simplifications on arrive à :

$$Q_H = Q \frac{T_H}{T} \frac{T - T_E}{T_H - T_E}$$

c - Pour maintenir le bilan thermique de l'habitation, on doit encore fournir pendant $t = 1$ heure une énergie $Q_H = \Phi_{th} \times t$.

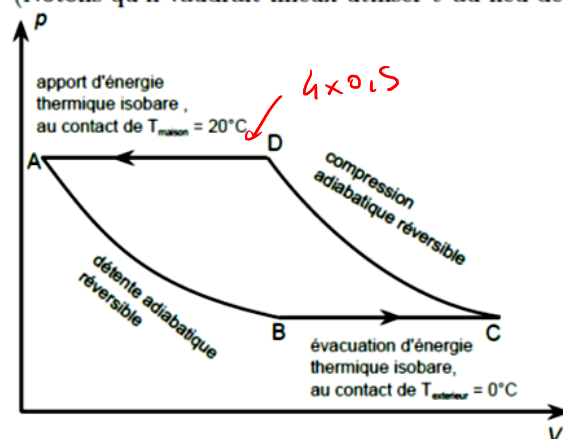
L'énergie thermique fournie par le bois est $Q = Q_H \frac{T}{T_H} \frac{T_H - T_E}{T - T_E}$. Elle correspond à une masse de bois telle que $m'_B \times q_B = Q$. On a donc

$$m'_B = \frac{\Phi_{th} t}{q_B} \frac{T}{T_H} \frac{T_H - T_E}{T - T_E} = 0.31 \text{ kg}$$

Par rapport à $m_B = 2.4 \text{ kg}$, la consommation de bois a été divisée par 7.7, ce qui est remarquable.

Remarque : Le gain réel sera moindre, car nous avons supposé ici un fonctionnement réversible, un transfert d'énergie thermique sans perte entre réservoir de bois et moteur, un transfert de travail du moteur à la pompe sans perte, etc.

8 - a - Voir ci-dessous. Le sens est antihoraire, ce qui est normal pour une machine réceptrice. (Notons qu'il vaudrait mieux utiliser v au lieu de V , mais nous suivons l'énoncé.)



- b - L'évolution $A \rightarrow B$ est isentropique et on utilise le modèle du gaz parfait. L'exposant γ ne dépend pas non plus de la température. On a donc la relation de Laplace $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cst}$ (que l'on redémontre au brouillon à partir de $pV^\gamma = \text{cst}$ si besoin), soit $T_A^\gamma p_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma p_B^{1-\gamma}$. On a également $p_B = p_C$ car $B \rightarrow C$ est isobare, d'où

$$T_B = T_A \left(\frac{p_A}{p_C} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 152 \text{ K.}$$

6 x 0,5

On a de même :

$$T_D = T_C \left(\frac{p_C}{p_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 527 \text{ K.}$$

- c - L'échange de chaleur avec la source chaude a lieu lors de l'étape $D \rightarrow A$. Le fluide est alors plus chaud que la maison ($527 \text{ K} = 254^\circ\text{C}$ au point D), et cède de l'énergie thermique à l'intérieur de la maison à mesure qu'il se refroidit.

L'échange de chaleur avec la source froide a lieu lors de l'étape $B \rightarrow C$. Le fluide est alors plus froid que le milieu extérieur ($152 \text{ K} = -121^\circ\text{C}$ au point B), et il se réchauffe donc au contact du milieu extérieur, gagnant ainsi de l'énergie thermique.

- d - ★ Le gaz évolue de façon isobare de T_i à T_0 . Le premier principe version isobare, appliqué au système fermé $\{n \text{ moles de gaz}\}$, indique directement que $\Delta H = Q$.

Or $\Delta H = C_p \Delta T = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_0 - T_i)$ pour un gaz parfait. Loi de Joule

On a donc $Q = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_0 - T_i)$.

★ On applique cette fois le second principe au système fermé $\{n \text{ moles de gaz}\}$: $\Delta S = S_e + S_c$.

On a $S_e = \frac{Q}{T_0} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \frac{T_0 - T_i}{T_0}$, et $\Delta S = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_i}$.

D'où $S_c = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \left(\ln \frac{T_0}{T_i} - \frac{T_0 - T_i}{T_0} \right)$.

8 x 0,5

Remarque : L'énoncé prend le raccourci de raisonner sur un système fermé $\{n \text{ moles de gaz}\}$, alors qu'en réalité les échangeurs thermiques sont des systèmes ouverts où le gaz est en écoulement. Nous verrons comment traiter ceci dans un prochain chapitre : on aurait $\Delta h = w_i + q = q$, et $\Delta h = c_p \Delta T$. Il se trouve que comme l'évolution est isobare, cela revient au même.

- e - On applique la formule de la question précédente pour S_c , en prenant les bonnes températures.

★ Évolution de B vers C.

On a $T_i = T_B = 152 \text{ K}$ et $T_0 = T_C = 273 \text{ K}$, on obtient $\frac{S_c}{n} = 4.14 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

★ Évolution de D vers A.

On a $T_i = T_D = 527 \text{ K}$ et $T_0 = T_A = 293 \text{ K}$, on obtient $\frac{S_c}{n} = 6.16 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- f - Il faut bien identifier que $T_{s-c} = T_A = 293 \text{ K}$ est la température de la source chaude, et que $T_{s-f} = T_C = 273 \text{ K}$ est celle de la source froide.

On a également $Q_{s-c} = Q_{D \rightarrow A} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_A - T_D)$, négatif donc la valeur absolue est $|Q_{s-c}| = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_D - T_A)$.

Ainsi, on obtient $e_2 = 2.08$.

Cette valeur est bien inférieure à la valeur $e_1 = 15$ calculée précédemment pour la PAC suivant le cycle de Carnot réversible fonctionnant entre 0°C et 20°C . La raison est que le cycle ABCD effectué par le fluide n'est justement pas le cycle de Carnot : comme nous

venons de le prouver, les transferts thermiques isobares non isothermes sont directement responsable de la création d'entropie et de la baisse de rendement.

Mais soulignons encore une fois que des échanges non isothermes sont nécessaires pour que le transfert thermique s'effectue en un temps fini.

Remarque : On peut manipuler l'expression de e_2 et aboutir, après quelques lignes, à la forme

$$e_2 = \frac{1}{1 + \frac{T_C - T_B}{T_A - T_D}}.$$

On peut par ailleurs retrouver cette même expression en partant directement de $e_2 = \frac{-Q_{D \rightarrow A}}{W_{\text{cycle}}}$ et en exprimant numérateur et dénominateur en fonction des températures à l'aide du premier principe. Mais pour être rigoureux ceci nécessite d'utiliser le premier principe pour un système en écoulement (car le gaz s'écoule dans différents éléments de la PAC), que nous n'avons pas encore vu. C'était l'approche employée dans le sujet d'origine.

Partie III : vidange de citerne

1. Pour un fluide parfait, incompressible, en régime permanent et sur une ligne de courant (ou irrotationnel, sur un tube de courant) on a :

2

4x0,5

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{cste}$$

2. La conservation de la masse en régime permanent se traduit par la conservation du débit massique sur toute section de l'écoulement et comme le fluide est incompressible, il en est de même pour le débit volumique. Ainsi en supposant les vitesses uniformes dans les sections droites

3

$$D_v = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = V_A S_A = V_B S_B$$

3. L'énoncé nous invite à utiliser la relation de BERNOULLI entre les points A et B, soit $\frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g z_B + P_B$. Or la relation également donnée $S_B \ll S_A$ permet d'affirmer avec la question précédente que $V_B \gg V_A$ et de simplifier la relation de BERNOULLI pour en tirer $\rho g h + P_0 = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_0$ soit la relation demandée

3

$$V_B = \sqrt{2gh}$$

4. Le point A est sur la surface libre à la hauteur $H(t)$ et $\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \frac{dH}{dt} \vec{u}_z$. La conservation du débit $v_A = v_B \frac{S_B}{S_A}$ est exprimée en norme et $\vec{v}_A = \ominus v_A \vec{u}_z$. On déduit de l'égalité des deux relations l'équation différentielle suivante : $\frac{dH}{dt} = -\frac{D_v}{S} = -\frac{S_B}{S_A} \sqrt{2gH(t)}$

La méthode de séparation des variables permet d'écrire : $\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{S_B \sqrt{2g}}{S_A} dt$ que l'on intègre entre les instants $t = 0$ où $H(t = 0) = H$ et T où $H = 0$. On en déduit $\int_H^0 \frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{S_B \sqrt{2g}}{S_A} \int_0^T dt =$

1.5 $\left[2\sqrt{H}\right]_H^0 = -\frac{S_B\sqrt{2g}}{S_A}t$ d'où

$$T = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H}{g}} \simeq 451 \text{ s}$$

5. Avec les mêmes hypothèses que la question 3 et la relation donnée par l'énoncé, il vient : $\frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho gh + 0 = -\frac{1}{2}K_c\rho V_B^2$ d'où

$$V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_c}}$$

6. La même démarche que celle de la question 4 permet d'établir l'équation différentielle $S_A \frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_c}} S_B$ dont la solution permet d'établir

$$T' = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H(1+K_c)}{g}} \simeq 561 \text{ s}$$

Le temps de vidange est évidemment allongé par la prise en compte de cette perte de charge. La modification n'est pas négligeable.

7. Le coefficient de perte de charge K_{total} est composé de plusieurs pertes de charge singulières : convergent + 2 coudes brusques à 90° + pompe + coude arrondi à 90° ce qui amène à la relation $K_{\text{total}} = K_C + 2 * K_{b,90} + K_{\text{pompe}} + K_{a,90}$ avec $K_c = 0,55$; $K_{b,90} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $K_{a,90} = \frac{1}{2} \left(0,131 + 1,847\left(\frac{3,6}{10}\right)^{\frac{7}{2}}\right) = 0,09$. On en déduit

$$K_{\text{total}} = 9,64$$

8. On en déduit $\Delta p_{s,\text{tot}} = K_{\text{total}} \frac{1}{2} \rho V_{\text{moy}}^2 = 82,0 \times 10^3 \text{ Pa}$.

9. De la même façon

$$\Delta p_{r,\text{tot}} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{\text{moy}}^2 \frac{l}{d} = 57,9 \times 10^3 \text{ Pa}$$

10. Par conservation du débit volumique en écoulement incompressible, on a

$$Q_V = V_{\text{moy}} S_E = V_{\text{moy}} \pi a^2 = 4,58 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

11. Et la relation fournie par l'énoncé permet de poser :

$$\mathcal{P}_u = Q_V \left(\frac{1}{2} \rho (V_E^2 - V_A^2) + \rho g (z_E - z_A) + (p_E - p_A) + (\Delta p_{r,\text{tot}} + \Delta p_{s,\text{tot}}) \right) \text{ soit :}$$

$$\mathcal{P}_u \simeq Q_V \left(\frac{1}{2} \rho V_{\text{moy}}^2 + \rho gh + 0 + (\Delta p_{r,\text{tot}} + \Delta p_{s,\text{tot}}) \right) \simeq 868 \text{ W} \text{ dont on déduit}$$

$$\mathcal{P}_e = \frac{\mathcal{P}_u}{0,8} = 1085 \text{ W}$$

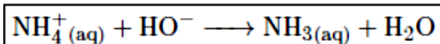
Partie IV : Diagramme d'état

- (1) $T_c \approx 405 \text{ K}$, $P_c \approx 114 \text{ bar}$, $v_c \approx 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} = 4,5 \text{ L} \cdot \text{kg}^{-1}$ 3 x 0,5 + 3 x 0,5 pour les 3 domaines
- (2) (a) $P_1 = P_{\text{sat}}(T) \approx 40 \text{ bar}$. On lit le volume massique à cet instant v_G sur la courbe de rosée à cette pression : $v_G \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, soit un volume total $V_1 = v_G M n = 2,6 \text{ L}$. 4 x 0,5
- (b) On est encore sur le palier (isotherme) : $P_2 = P_{\text{sat}}(T) \approx 40 \text{ bar}$. On lit sur la courbe d'ébullition $v_L \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, soit un volume total $V_2 = v_L M n = 0,17 \text{ L}$.
- (c) Volume massique $v_3 = \frac{V_3}{nM} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Titre en vapeur : $x_v = \frac{v_3 - v_L}{v_G - v_L} = 29\%$
- (d) L'ammoniac était gazeux, supposé gaz parfait : $V_{\text{ini}} = \frac{nRT}{P_{\text{ini}}} = 7,3 \text{ L}$.
- (e) L'ammoniac liquide étant incompressible il garde le même volume par changement de pression : $V_f \approx V_2 = 0,17 \text{ L}$.
- (3) (a) $m_{\text{min}} = \frac{V}{v_G(300 \text{ K})} \approx 0,8 \text{ kg}$
- (b) $m_{\text{max}} = \frac{V}{v_L(300 \text{ K})} \approx 6 \cdot 10^1 \text{ kg}$
- (4) La première bouteille a un volume massique fixé à $v_1 = \frac{V}{m_1} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. La seconde a un volume massique fixé à $v_2 = \frac{V}{m_2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. On trace les droites verticales correspondantes. À 300K, le contenu des deux bouteilles étant diphasé. 3 x 1
- (b) Tant que l'on a un système diphasé, la pression est donc la pression de vapeur saturante, et est liée à la température par l'équation de frontière du diagramme (P, T). 2 x 0,5
- (d) Pour éviter ce problème, il faut donc que par élévation de température, le système diphasé aie plutôt tendance à se vaporiser : il faut que le volume massique de remplissage soit supérieur au volume massique critique. Pour une bouteille d'ammoniac de 100L, il ne faut pas dépasser une masse de $m = V/v_c \approx 19 \text{ kg}$.

(C)

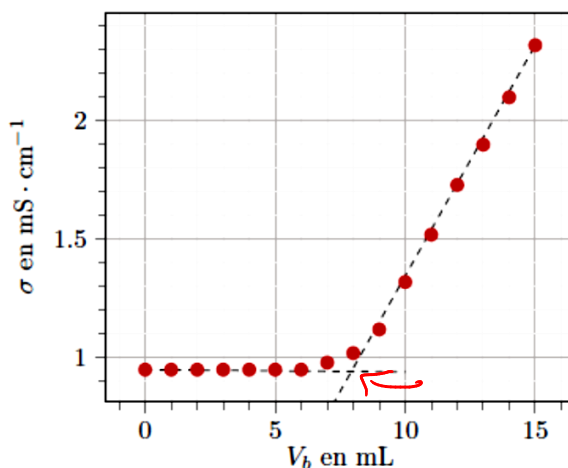
Partie V : Dosage de l'ammoniac

1. Il faut une électrode de référence et une électrode dite « de verre ». 2 x 0,5
2. Il n'est pas utile d'étalonner le conductimètre pour réaliser un dosage conductimétrique car, si on peut négliger la dilution inhérente au titrage, on recherche des intersections de droites.
3. L'équation de titrage est :



4. - Avant l'équivalence, les ions HO^- sont neutralisés et ne participent pas à la conductivité du milieu réactionnel. Les ions NH_4^+ sont remplacés par des ions Na^+ de conductivité quasi égale. On peut éventuellement observer une légère pente négative proportionnelle à $\Lambda^\circ(\text{Na}^+) - \Lambda^\circ(\text{NH}_4^+)$;
- après l'équivalence, les ions HO^- ne sont plus neutralisés, et on observe une forte pente proportionnelle à $\Lambda^\circ(\text{Na}^+) - \Lambda^\circ(\text{HO}^-)$. 4 x 0,5

5. La conductimétrie est la méthode la plus précise compte-tenu du très faible saut de pH à l'équivalence.



Variés de droite 0,5
intersection 0,5

On lit :

$$V_{\text{eq}} \simeq 7,8 \text{ mL}$$

6. Un tableau d'avancement donne :

mol	$\text{NH}_4^+(\text{aq})$	$+ \text{HO}^-$	$\longrightarrow \text{NH}_3(\text{aq})$	$+ \text{H}_2\text{O}$
État initial	CV	$C_b V_{\text{eq}}$	0	excès
$\forall t$	$CV - \xi$	$C_b V_{\text{eq}} - \xi$	ξ	excès

Dans la solution dosée, on a $CV = C_b V_{\text{eq}}$ dont on déduit : $C = C_b \frac{V_a + V_{\text{H}_2\text{O}}}{V_{\text{eq}}}$. En prenant en compte la dilution, il vient :

$$C_a = 10C = 10C_b \frac{V_a + V_{\text{H}_2\text{O}}}{V_{\text{eq}}} \simeq 7,5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

7. On peut alors remonter à la masse d'ion NH_4^+ initialement présents :

$$m(\text{NH}_4^+) = C_a V_a (14 + 4) \simeq 1,35 \text{ g} \quad \text{d'où : } 21,2 \%$$

Le contre-ion de NH_4^+ dans le nitrate d'ammonium est NO_3^- . Il se trouve en proportion stoechiométriques et on peut calculer sa masse selon :

$$m(\text{NO}_3^-) = C_a V_a (14 + 3 \times 16) \simeq 4,65 \text{ g} \quad \text{d'où : } 73,2 \%$$

Et enfin :

$$m(\text{N}) = C_a V_a (2 \times 14) \simeq 2,1 \text{ g} \quad \text{d'où : } 33,1 \%$$

Partie VI : Etude d'un détecteur de métal

BANQUE PT 2003

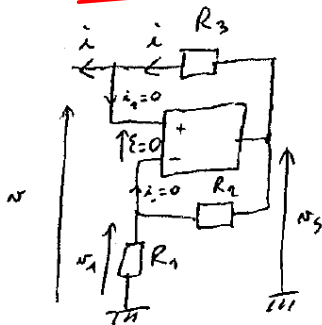
EPREUVE DE PHYSIQUE B

TROISIEME PARTIE : Etude d'un détecteur de métal

A) ETUDE D'UN OSCILLATEUR :

A-1) AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$

* boucle de rétroaction entre sortie et entrée inverseuse

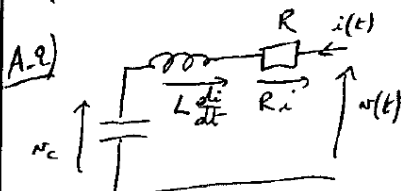
 $\Rightarrow$ régime linéaire $\Rightarrow V_+ = V_-$ on a $V = V_+ (V_+ = V_-)$ tension aux bornes de R_3 : $V_s - V = R_3 i$ division de tension : $V_+ = V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$
($i_- = 0$)

$$\Rightarrow V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V - V = R_3 i$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{R_1 R_3}{R_2} i(t)}$$

(on reconnaît le montage à résistance négative)

* loi des mailles : $V = V_c + L \frac{di}{dt} + R i$

$$i = C_0 \frac{dV_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad = \frac{R_1 R_3}{R_2} i$$

conservation énergie

on dérive la loi des mailles par rapport au temps :

$$\frac{R_1 R_3}{R_2} \frac{di}{dt} = \frac{i}{C_0} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{R_1 R_3}{R_2 L}\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC_0} i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\omega_0(m - m') \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

A-3) * $m' < m \Rightarrow 2\omega_0(m - m') > 0$ alors on a amortissement $\Rightarrow$ système stable

(3 cas possibles : aperiodique convergent, aperiodique critique convergent, pseudo-periodique amorti)

* $m' > m \Rightarrow 2\omega_0(m - m') < 0$ alors on a amplification $\Rightarrow$ système instable

(3 cas possibles : aperiodique divergent, aperiodique critique divergent, pseudo-periodique amplifié)

l'amplitude des oscillations sera dans ce cas limitée par la saturation de l'AO.

$$* m' = m \quad ; \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

On aura alors des oscillations sinusoïdales dans le circuit. C'est l'oscillateur quasi-sinusoïdal à résistance négative.La condition $m = m'$ est réalisable en choisissant correctement la valeur de R_3 (c'est pourquoi R_3 est réglable) : $R_3 = \frac{R R_1}{R_2}$ $\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \Rightarrow$ la pulsation des oscillations

$$\text{est } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} = 7,6 \text{ kHz}}$$

$$A-4) f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \Rightarrow \ln f_0 = -\ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln C$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = 2,5\%}$$

B) DETECTEUR DE METAL :

B.1) $V_A = A V_{c1} V_{c2} \Rightarrow A \text{ en } V^{-1}$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\sim V$ $\sim V$ $\sim V$

2x0,5

$V = B (f - f_0') \Rightarrow B \text{ en } V \cdot s$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\sim V$ fréquence en $Hz (s^{-1})$

B.2) $v_{c1} \approx V_0 \cos(\omega_1 t)$

$v_{c2} \approx V_0 \cos(\omega_2 t + \tau)$

$V_A \approx A V_0^2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \tau)$

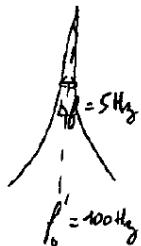
$\approx \frac{A V_0^2}{2} \left[\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \tau] + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \tau] \right]$

xingo

Après le multiplicateur, on a un signal de fréquence $(f_1 + f_2)$ et un signal de fréquence $(f_2 - f_1) \approx f_0'$.

Le filtre passe-bande sert à éliminer le signal de fréquence $(f_1 + f_2)$ et ne conserve que le signal de fréquence $(f_2 - f_1)$.

bande-passante : $\Delta f = \frac{f_0'}{Q'} \approx \frac{100}{20} \approx 5 \text{ Hz}$



$\Rightarrow$ le signal de fréquence $(f_1 + f_2) \approx 16 \text{ kHz}$ est coupé

$\Rightarrow$ le signal à l'entrée du convertisseur fréquence-tension est assimilable à une tension sinusoïdale de fréquence $(f_2 - f_1)$, dès lors que l'écart entre f_1 et f_2 est situé dans la bande passante du filtre.

B.3) Les 2 fréquences f_{10} et f_{20} ont peu de chances d'être identiques car les bobines des 2 circuits n'ont sûrement pas rigoureusement la même inductance (idem pour les capacités) or $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

2x0,5

On peut ajuster l'écart entre ces 2 fréquences en prenant des capacités réglables.

B.4) $f_{10} \rightarrow f_1 = f_{10} + \Delta f$

$f_{20} \rightarrow f_2 = f_{20} + \Delta f$

$f_2 - f_1 = (f_{20} + \Delta f) - (f_{10} + \Delta f) = f_{20} - f_{10}$

1,5

$V_c = B (f - f_0') = B ((f_2 - f_1) - (f_{20} - f_{10})) = 0$

$\Rightarrow$ pas d'influence sur la sortie du montage

B.5) $f_0' = f_{20} - f_{10} = 7653 - 7516 = 137 \text{ Hz}$

$f = f_2 - f_1 = f_{20} - (f_{10} - \Delta f) = f_0' + \Delta f = 142 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f - f_0' = \Delta f = 5 \text{ Hz}$

$V_c = B (f - f_0') = B \Delta f = 3 \text{ V} = V_c$

7x0,5

Si l'objet est loin du détecteur, $V_c = 0$

Si l'objet est + proche de f_1 , $V_c > 0$

Si l'objet est + proche de f_2 , $V_c < 0$

