

Mécanique des Fluides

Question Concours

Notions clefs

Plan

Point de vigilance

HYDROSTATIQUE

Démontrer la loi hydrostatique

Fluide au repos
→ PFD statique

- 1) Tranche horizontale dz
- 2) Forces : $P(z) \cdot S - P(z+dz) \cdot S - \rho g \cdot S \cdot dz = 0$
- 3) → $dP/dz = -\rho g$ → intégrer
- 4) $P(z) = P_0 - \rho g z$

Signe de z !
(positif vers le haut)
→ $dP/dz = -\rho g$

Poussée d'Archimède / Force sur barrage

Intégrale de surface
 $dF = P \cdot d^2S$

- 1) Coordonnées adaptées (z vers le haut)
- 2) $P(z)$ du fluide déplacé
- 3) $F = \int P \cdot dS$ sur toute la surface
- 4) Archimède : $F = \rho_{\text{FLUIDE}} \cdot g \cdot V$

ρ = fluide déplacé
pas l'objet !

- Statiques : Un Fluides au repos est soumis à

- Son poids $\vec{P} = \iiint \rho \cdot g \cdot d^3V$

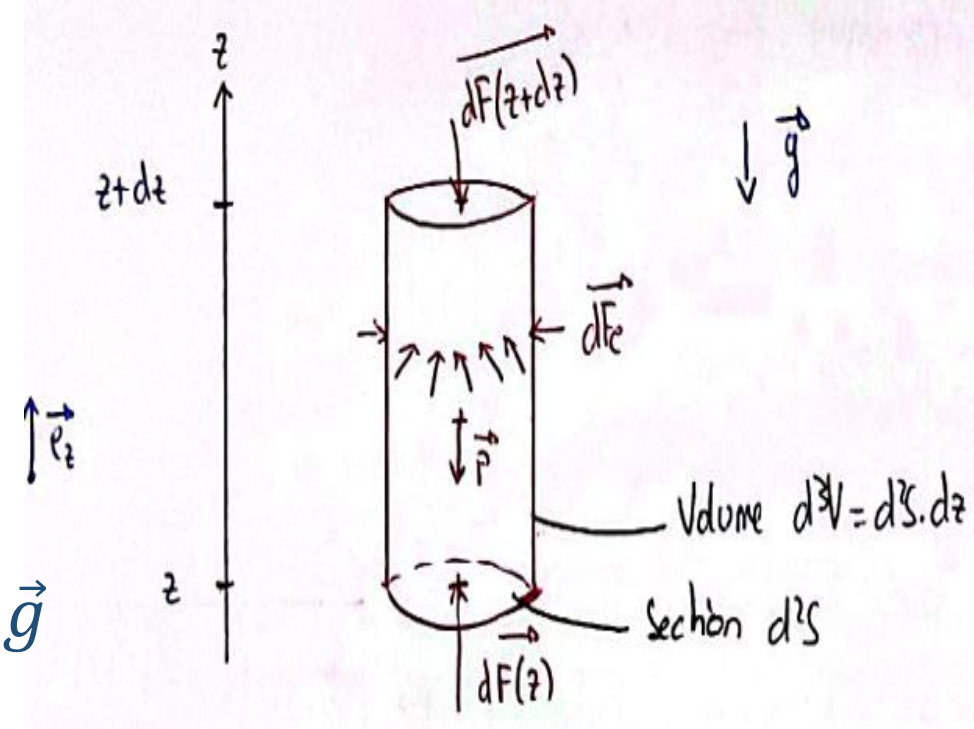
- Forces de Pression $\vec{F}_{\text{press}} = \iint P(M) d^2S$

- (si $P = P_0 = \text{cste}$) $\Rightarrow \vec{F}_{\text{press}} = P_0 \vec{S}$

- Poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot \vec{g}$

- Profil de Pression : (Relation de la statique des fluides)

$$\frac{dP}{dz} = \pm \rho(z) * g$$



Démo :

- 1) On définit le système
- 2) On fait le bilan des forces
- 3) On applique le Principe Fondamental de la Statique sur la pdf d^3V

Si :

- Fluide Incompressible $\rho = cste$: $P(z) = P_0 - \rho \cdot g \cdot z$
- Fluide est un Gaz Parfait (Par séparation de variable) : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T_0}\right)$

Théorème de Pascal :

Un fluide incompressible => Variations de Pression va intégralement se transmettre a tous les points

Méthodes : Calculer une masse ou un poids en intégrant sur un volume (ρ non – uniforme)

1°) Système de coordonnées adaptées

2°) On regarde de quelles variables dépend ρ

3°) Construire un volume d^3V tq $\rho = \text{cste}$ (Exprimer d^3V)

4°) Ainsi, la masse de fluide dans d^3V est : $dm = \rho d^3V$

5°) Intégrer sur d^3V la masse totale $M = \int dm = \int \rho d^3V$

6°) Avoir le poids $\vec{P} = \int dm \vec{g} = \int \rho d^3V \vec{g}$

ρ uniforme $\Rightarrow m = \rho V \Rightarrow P = \rho V \vec{g}$

Méthodes : Calculer la résultante des forces de pression en intégrant sur une surface
(pression et vecteur normal \vec{n} non-uniforme)

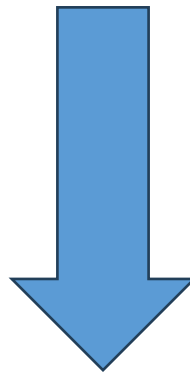
1°) Système de coordonnées adaptées

2°) On regarde de quelles variables dépendent p et \vec{n} .

3°) Construire une surface élémentaire d^2S tel que $P=cst$ et $\vec{n}=cste$ (Exprimer d^2S)

4°) Ainsi, la force pressante exercé sur d^2S est : $d\vec{F}=Pd^2S\vec{n}$

5°) Intégrer sur d^2S : $\vec{F}=\int d\vec{F}=\int Pd^2S\vec{n}$ $P\vec{n}$ uniformes $\Rightarrow \vec{F}=PS\vec{n}$



Exemples : Barrage

1) Paramétrage

Axe vertical : Fixer Oz vers le bas, avec $z=0$ à la surface libre.

Surface élémentaire : Découper la paroi en bandes horizontales $d^2S = dy \cdot dz$

Identifier le vecteur normal \vec{n} sortant de la paroi (généralement \vec{u}_x)

2) Loi statique des fluides

3) BAME : $\overrightarrow{dF_{air/barrage}}$ et $\overrightarrow{dF_{eau/barrage}}$

4) Calcul de $\overrightarrow{dF_{tot}}$

P O M P E

<p>Énoncer Bernoulli + hypothèses</p>	<p>Parfait + Stationnaire + Incompressible + Le long d'une ligne de courant</p>	<p>1) Vérifier les 4 conditions (filtre !) 2) Choisir A et B : même ligne de courant, là où les inconnues sont utiles 3) $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B$ 4) Si irrotationnel \rightarrow cste donc valable partout</p>	<p>Sans irrotationnel : valable seulement sur 1 ligne de courant Patm s'élimine si surface libre des 2 côtés</p>
<p>Choisir les points A et B</p>	<p>Stratégie de résolution</p>	<p>A = là où on connaît les données B = là où on cherche l'inconnue Règle réservoir : grand réservoir $\rightarrow v = 0$ Surface libre $\rightarrow P = P_{atm}$ $\rightarrow P_{atm}$ s'élimine si présent des deux côtés</p>	
<p>Travail pompe W / Pertes de charge</p>	<p>Bernoulli généralisé Bilan énergétique</p>	<p>1) Bernoulli généralisé entrée \rightarrow sortie $\frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s + P_s = \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e + W - \Delta u$ 2) W en J/m³ (par unité de volume) 3) W > 0 : pompe (fournit énergie) W < 0 : turbine (récupère énergie)</p>	<p>Distinguer pompe (W>0) vs turbine (W<0)</p>

T U Y A U T E R I E

<p>Laminaire ou turbulent (Reynolds)</p>	<p>$Re = \rho v D / \eta$ Seuil $Re = 2000$</p>	<p>1) Calculer Re avec DIAMÈTRE hydraulique D 2) $Re < 2000 \rightarrow$ laminaire \rightarrow profil parabolique $v_{moy} = v_{max} / 2$ 3) $Re > 2000 \rightarrow$ turbulent \rightarrow profil aplati $v_{moy} = v_{max}$</p>	<p>Diamètre hydraulique ! pas le rayon</p>
---	---	--	--

Dynamique : -> écoulement du fluide, particule de fluide

Vocabulaires :

-> lignes de courant : En tout point, ligne tangente à la vitesse de l'écoulement

Trajectoire suivi par la particule de fluide

-> Tube de courant : Surface créé par des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé

Types de Descriptions :

Description Eulérienne (pour un système ouvert) : Mesure faite au repos, à un endroit fixe.

Description Lagrangienne (pour un système fermé) : Mesures faite en suivant le fluide dans son mouvement.

Types de Déplacement :

- Translation
- Rotation
- Déformation (changement de volume)

Stationnaire/Permanent : Grandeurs physique ($P, \vec{v}, T, \rho, \dots$) en un point fixe ne dépend pas du temps
Écoulement stationnaire $\Leftrightarrow Dm$ se conserve

Démo : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\vec{Jm}) = 0 \Leftrightarrow$ Ostrogradski : $\oiint \vec{Jm} \cdot d^2S = 0 \Leftrightarrow \vec{Jm}$ à flux conservatif $\Leftrightarrow Dm$ se conserve (Dm cste)

Incompressible : Lors de l'écoulement toute particule qui se déforme ne change pas de volume

-> Lignes de courant se resserrent (v augmente car fluide accélère)

-> Inverse : compressible/divergent : Volume de la particule de fluide lors du mouvement

-> Propriétés : Écoulement incompressible $\Leftrightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$

Écoulement incompressible $\Leftrightarrow Dv$ se conserve ($S_A \cdot V_A = S_B \cdot V_B$)

Démo : $\text{div}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$ Ostrogradski $\oiint \vec{v} \cdot d^2S = 0 \Leftrightarrow$ champ de vitesse à flux conservatif $\Leftrightarrow Dv$ se conserve
($Dv = \text{cste}$) (Dans tube de courant)

Type d'écoulement

Irrrotationnel : Lors de l'écoulement, la particule de fluide ne subit pas de rotation

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Uniforme : Vitesse de l'écoulement est la même en tout point du fluide

Laminaire : Lignes de courant ne se croisent pas (parallèle) ($Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} < 2000$)

(avec η la viscosité dynamique en $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$)

Turbulent : (Ligne de courant se croisent) $\Leftrightarrow Re > 2000$

Débits : Débit massique : $Dm = Qm \text{ (Kg} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$

$$Dm = \iint \vec{J}_m \cdot \vec{d}^2S \quad \text{flux de } \vec{J}_m \text{ à travers } S$$

Débit Volumique $Dv = Qv \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$

$$Dv = \iint \vec{v} \cdot \vec{d}^2S \quad \text{flux de } \vec{v} \text{ à travers } S$$

THEOREMES :

Théorème d'Ostrogradski : $\iint \vec{A} \cdot \vec{d}^2S = \iiint \text{div}(\vec{v}) d^3V$

Théorème de Stokes : $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot \vec{d}^2S$

Équation Locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}_m) = 0 \quad (\text{en 3D})$$

Relation de Bernoulli : condition d'utilisation (Parfait, Stationnaire et Incompressible) + le long d'une ligne de courant entre deux points

Sans perte de charge :

-Basique $\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{P}{\rho} = \text{cst}$

-Généralisé $\frac{1}{2} v_s^2 + gz_s + \frac{P_s}{\rho} = \frac{1}{2} v_e^2 + gz_e + \frac{P_e}{\rho}$

Démo :

1°) Hypothèse pour utiliser Bernoulli

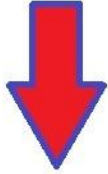
2°) Définir le système

3°) Bilan d'énergie

4°) Théorème de l'énergie mécanique

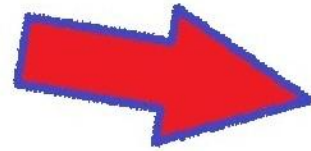
5°) Conditions limites d'un fluide parfait et d'un fluide visqueux

Mécanique des fluides



HYDROSTATIQUE

- Démonstration de la loi
- Déterminer une différence de pression



BERNOULLI

Système étudié:

Pompe

- Donner la loi avec ses hypothèses
- Conservation du débit=> égalité de vitesse.
- Différence de pression entre deux pts
- Pertes de charges
- Calcul du travail d'une pompe

Système étudié:

Tuyauterie

- Déterminer la vitesse moyenne.
- Ecoulement laminaire ou turbulent.
- Représenter le profil de vitesse
 - Appliquer la loi
- Déterminer le débit volumique.
- Déterminer la vitesse moyenne.
- Bilan des forces sur un volume élémentaire.
- Déterminer l'expression de la vitesse dans la tuyauterie.