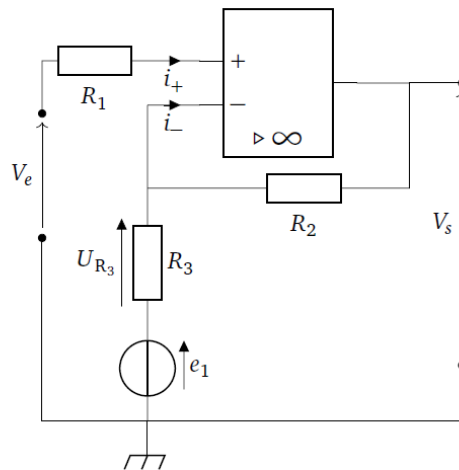


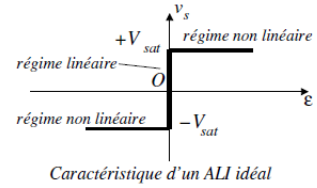
Corrigé

I.A. Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

Q1. Modèle de l'ALI idéal : gain différentiel infini, bande passante infinie, impédance d'entrée infinie, impédance de sortie nulle.



Q1. L'ALI idéal possède des résistances d'entrée infinie et une résistance de sortie nulle. En notant $\varepsilon = v_+ - v_-$, sa caractéristique, valable quelle que soit la fréquence, est la suivante (avec $V_{sat} \approx 15 \text{ V}$) :



L'absence de courant au niveau de la borne non inverseuse assure : $v_+ = v_e$. La rétroaction sur la borne inverseuse permet de faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire, c'est à dire $v_- = v_+ = v_e$.

On applique enfin une loi des nœuds en terme de potentiels au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\frac{e_1 - v_-}{R_3} = \frac{v_- - V_s}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e_1 - V_e}{R_3} = \frac{V_e - V_s}{R_2}$$

On en déduit $V_e \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{e_1}{R_3} + \frac{V_s}{R_2}$, c'est à dire :

$$V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$$

Conséquence : $i_+ = i_- = 0$, et en régime linéaire : $V_+ = V_-$.

Ainsi, $V_e - R_1 i_+ = V_e = V_+ = V_- = e_1 + U_{R_3}$

Diviseur de tension avec R_3 et R_2 en série (car $i_- = 0$) : $U_{R_3} = (V_s - e_1) \frac{R_3}{R_2 + R_3}$

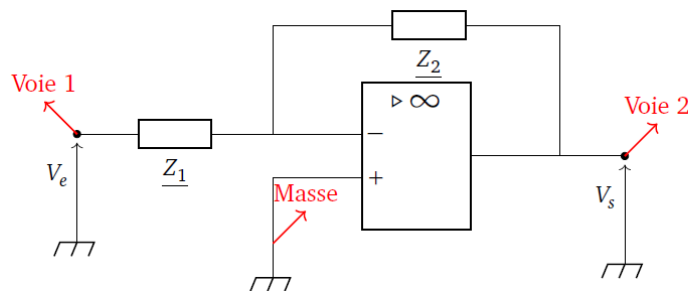
On conclut : $V_e = e_1 + (V_s - e_1) \frac{R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$

Q2. $V_e = 0,95 \text{ V}$

Q3. $F = \frac{C V_e}{K} = 0,76 \text{ N}$

I.B. Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame.

Q4. On travaille en régime sinusoïdal forcé, on passe donc par un modèle d'impédance, en notant ω la pulsation de forçage.



Sur le schéma, $\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}$, et $\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$

L'ALI est idéal, donc $V_- = V_+ = 0$, il n'y a pas de courant d'entrée à la borne - :

Loi des noeuds :

$$\frac{V_e - 0}{\underline{Z}_1} = \frac{0 - V_s}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{1}{\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2} = -\frac{1}{\left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}\right) \left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega\right)}$$

En développant :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + j(R_1 C_2 \omega - \frac{1}{R_2 C_1 \omega}) + \frac{C_2}{C_1}} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}} \frac{1}{1 + j \left(\frac{R_1 C_2}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}} \omega - \frac{1}{R_2 C_1 \omega \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right)} \right)}$$

Par identification : $A = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}$, $\omega_1 = \frac{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}{R_1 C_2} = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}$; $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_1 \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right)} = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$

Q5. $H = |\underline{H}| = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2}}$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H = 0$: c'est un filtre passe-bande du second ordre.

Q6. Le gain H est maximal quand le dénominateur de la fraction est minimal, donc quand le terme sous la racine est minimal : c'est donc quand le carré est nul.

Ainsi H maximal équivaut à $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_1 \omega_2$

Comme $\omega > 0$, $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

Q7. Il faut observer les deux tensions à l'oscilloscope et repérer si le déphasage d'une tension par rapport à l'autre vaut π , c'est-à-dire **quand le maximum d'un des signaux coïncide avec le minimum de l'autre**. Une utilisation du mode XY peut être utile.

Un oscilloscope à double voie peut être utilisé, en connectant les masses à la masse du montage, et la voie 1 et 2 comme sur le schéma de la question Q4.

Q8. R_1 ayant été convenablement réglé, à la pulsation $\omega = 2\pi f$ d'excitation, le déphasage est de π entre signal de sortie et d'entrée.

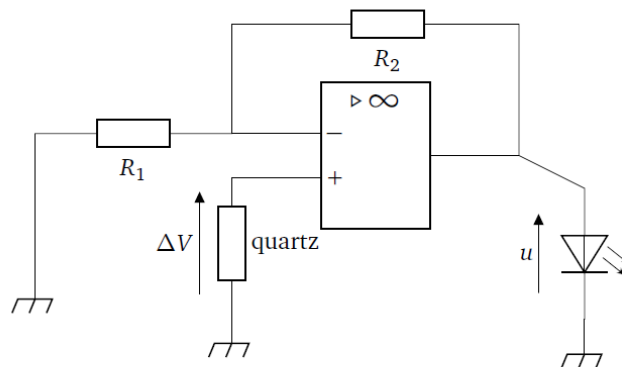
$$\arg \underline{H} = \pi \Leftrightarrow \underline{H} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \frac{A}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_{\max} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

Ainsi : $f = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 0,32 \text{ kHz}$

II.C. Détecteur de tension.

Q18. Le montage doit permettre d'amplifier si besoin la différence de potentiel aux bornes du quartz, si possible linéairement, de manière à ce que le seuil U_d d'allumage de la diode se situe entre la valeur amplifiée pour un choc et celle amplifiée pour un freinage brusque.

On peut utiliser un montage amplificateur non inverseur :



Avec ce montage, et l'ALI idéal, on obtient avec un diviseur de tension : $\Delta V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$, soit $u = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \Delta V$.

On souhaite que $\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \Delta V_{\text{choc}} > U_d > \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \Delta V_{\text{freinage}}$, soit :

$$\frac{\Delta V_{\text{freinage}}}{U_d} < \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} < \frac{\Delta V_{\text{choc}}}{U_d} \Leftrightarrow \frac{U_d}{\Delta V_{\text{choc}}} - 1 < \frac{R_2}{R_1} < \frac{U_d}{\Delta V_{\text{freinage}}} - 1$$

Application numérique : $\frac{R_2}{R_1} \in [0,65; 67]$.

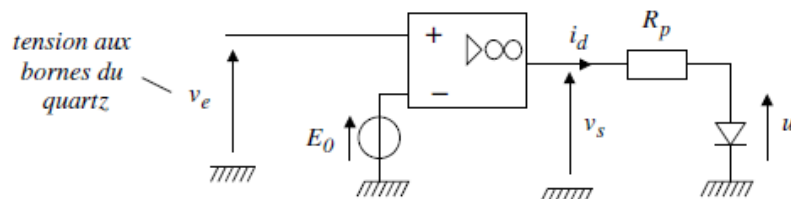
On peut prendre un rapport de 1, et prendre par exemple : $R_1 = R_2 = 1,0 \text{ k}\Omega$.

Un montage suiveur aurait aussi été adapté.

Q18. La diode doit s'allumer lorsque la tension aux bornes du quartz passe par une valeur haute de l'ordre de 2,0 V. On peut envisager le montage présenté ci-après utilisant un ALI en comparateur simple et un générateur de tension idéal de force électromotrice $E_0 = 1,0$ V.

Lors d'un simple freinage, $v_+ = v_e = \Delta V_f < v_- = E_0$, alors $v_s = -V_{sat} = -15$ V et la diode est bloquante.

Lors d'un choc, $v_+ = \Delta V_c = v_e > v_- = E_0$, alors $v_s = +V_{sat} = +15$ V, la diode devient passante et s'éclaire.



La résistance R_p est une résistance de protection qui limite l'intensité du courant i_d et la puissance dissipée dans la diode :

$$P_{\max} = U_d \times I_{d,\max} = U_d \times \frac{V_{sat} - U_d}{R_d} \quad \Leftrightarrow \quad R_d = \frac{U_d \times (V_{sat} - U_d)}{P_{\max}}$$

$$\text{A.N. : } R_d = \frac{1,9 \times (15 - 1,9)}{0,100} \Rightarrow \boxed{R_d = 2,5 \times 10^2 \Omega}.$$

Remarques :

- en situation bloquante, une tension négative de valeur absolue 15 V se reporte sur la diode ce qui pourrait éventuellement l'endommager mais aucune information n'est fournie à ce propos dans l'énoncé ;
- notons qu'avec la résistance R_p proposée, l'intensité du courant vaut :

$$i_p = \frac{V_{sat} - U_d}{R_p} = \frac{15 - 1,9}{2,5 \times 10^2} \approx 50 \text{ mA}$$

Cette intensité ne peut pas être délivrée par l'amplificateur opérationnel (l'intensité limite en sortie est plutôt de l'ordre de 20 mA), en pratique la limite de courant débité par l'ALI peut sans doute suffire pour protéger la diode.

IV. Oscillateurs

IV.A.

Q28. $\underline{H}(j\omega)\underline{v}_e = \underline{v}_s$

Q29. $\underline{K}(j\omega)\underline{v}_s + \underline{v}_e = \underline{v}_1$

Q30. $\underline{H}(j\omega)(-\underline{K}(j\omega)\underline{v}_s + \underline{v}_1) = \underline{v}_s \Leftrightarrow \underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{H}(j\omega)}{1 + \underline{K}(j\omega)\underline{H}(j\omega)}$

Q31. Il faut que le gain $|\underline{A}|$ tende vers l'infini à la pulsation choisie ω , il faut donc que le module du dénominateur tende vers 0, et donc que $\underline{K}(j\omega)\underline{H}(j\omega) = -1$ à la pulsation choisie.

Q32. On en déduit que $|\underline{K}(j\omega)| |\underline{H}(j\omega)| = 1$ (R1)

Q33. On en déduit aussi que $\arg(\underline{K}(j\omega)) + \arg(\underline{H}(j\omega)) = \pi$ (R2)

IV.B.

Q34. On procède à des impédances équivalentes, puis à un diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R \rightarrow C} + \underline{Z}_{R//C}} = \underline{u}_e \frac{1}{1 + \underline{Z}_{R \rightarrow C} \times \frac{1}{\underline{Z}_{R//C}}}$$

Or $\underline{Z}_{R \rightarrow C} = R + \frac{1}{jC\omega}$ et $\frac{1}{\underline{Z}_{R//C}} = \frac{1}{R} + jC\omega$, donc

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

Q35. Gain : $|\underline{K}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$

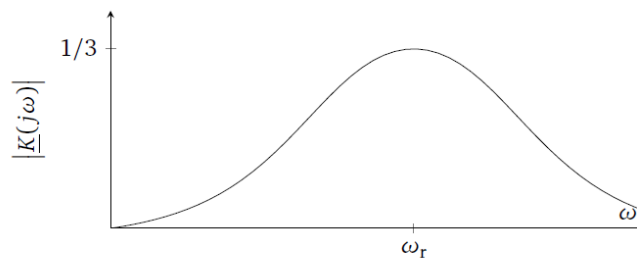
À basse fréquence, $|\underline{K}(j\omega)| \rightarrow 0$; À haute fréquence, $|\underline{K}(j\omega)| \rightarrow 0$ aussi.

Le maximum est atteint quand le dénominateur est minimal, donc quand la parenthèse s'annule :

$$RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{RC}.$$

Le gain vaut alors $|\underline{K}(j\omega_r)| = \frac{1}{3}$.

Avec ces données, on trace l'allure :



Q36. On a donné les réponses précédemment pour tracer l'allure : $\omega_r = \frac{1}{RC}$ et $|\underline{K}(j\omega_r)| = \frac{1}{3}$

$$\text{Q37. } \underline{Z}_{\text{serie}} = R + \frac{1}{jC\omega_0} = R + \frac{R}{j} = \boxed{R(1-j)}$$

$$\text{Q38. } \frac{1}{\underline{Z}_{\text{par.}}} = \frac{1}{R} + jC\omega_0 = \frac{1}{R} + \frac{j}{R} = \frac{1+j}{R} \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{par.}} = \frac{R}{1+j}}$$

Q39. L'ALI est idéal, donc l'intensité entrant dans la borne (+) est nulle. On effectue un diviseur de tension :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{v}_s} = \frac{\underline{Z}_{\text{par.}}}{\underline{Z}_{\text{par.}} + \underline{Z}_{\text{serie}}} = \frac{\frac{1}{1+j}}{(1-j) + \frac{1}{1+j}} = \frac{1}{(1-j)(1+j) + 1} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\left| \frac{\underline{v}}{\underline{v}_s} \right| = \frac{1}{3}$. On retrouve bien le gain du filtre à la pulsation de résonance précédente.

Q40. L'ALI est idéal et en régime linéaire : $\underline{V}_+ = \underline{v} = \underline{V}_-$

Ainsi, par loi des nœuds (l'intensité entrant dans la borne (-) est nulle) :

$$\frac{\underline{v}_e}{R_1} = \frac{\underline{v} - \underline{v}_s}{R_2} \Rightarrow \boxed{\underline{v} = \underline{v}_s + \frac{R_2}{R_1} \underline{v}_e}$$

$$\text{Q41. Ainsi, } \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{v}}{\underline{v}_e} - \frac{R_2}{R_1} = \frac{\underline{v}_s}{3\underline{v}_e} - \frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow \frac{2\underline{v}_s}{3\underline{v}_e} = -\frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega_0) = -\frac{3R_2}{2R_1}}$$

Q42. Pour $\omega = \omega_r = \omega_0$, si on veut un oscillateur, il faut avoir

- (R1) : $|\underline{K}(j\omega_0)| |\underline{H}(j\omega_0)| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{3R_2}{2R_1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{R_2 = 2R_1}$
- (R2) : $\arg(\underline{K}(j\omega_0)) + \arg(\underline{H}(j\omega_0)) = \pi$ c'est bien vrai, car le premier est réel positif, le second est réel négatif.

Par exemple, on peut prendre $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$.