Mécanique **Bassin d'arrosage.**

Sujet de révision n°3 [Durée : 1h30]

Outils : Loi de l'hydrostatique. Force pressante. Relation de Bernoulli. Bilan d'énergie mécanique.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier différentes caractéristiques d'un bassin d'eau de forme parallélépipédique. Un robinet avec une valve permet l'écoulement de l'eau dans un tuyau cylindrique permettant l'arrosage régulier d'un potager domestique. Le bassin est alimenté par les eaux de pluie, mais en cas de pluviométrie trop faible, un dispositif de pompage est disponible pour remplir ce bassin depuis une source enterrée.

On note $h(t)$ la hauteur d'eau dans le bassin à un instant t donné. La base du bassin est carrée de côté $a = 73\,\text{cm}$ et est située directement sur le sol. L'eau sera assimilée à un fluide incompressible de masse volumique uniforme $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg.m}^{-3}$.
La surface haute du bassin est laissée à la pression atmosphérique, que l'on prendra ici égale à $P_0 = 1{,}0\,\text{bar}$.
On note g la norme du champ de pesanteur, supposée uniforme à l'échelle du bassin. Pour les applications numériques, on prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$.

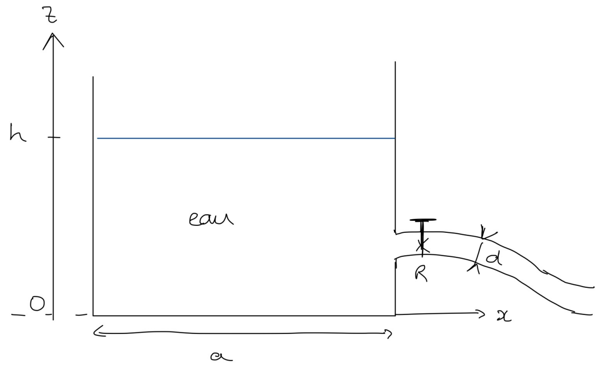


Figure **1** – Schéma du problème. O est l'origine du repère.

I. Résistance des parois du bassin

Le bassin est construit dans un revêtement en polychlorure de vinyle (PVC) d'épaisseur importante, et pouvant supporter de très légères déformations. Cependant, à cause des jointures des éléments, la différence de force totale exercée entre les parois des plaques de PVC ne peut excéder $\Delta F_{\text{max}} = 11\,\text{kN}$.

Le robinet est ici supposé fermé, et le bassin non alimenté, de sorte que la hauteur d'eau h est fixe, et le fluide au repos dans le référentiel terrestre.

(1) En utilisant les coordonnées du schéma, rappeler la loi de l'hydrostatique liant la pression P en un point du fluide d'altitude z, la masse volumique μ du fluide et le champ de pesanteur g.

(2) Définir un fluide incompressible puis, établir l'expression de la pression $P(z)$ en un point d'altitude z en fonction de P_0, h, g, μ et z.

(3) Déterminer alors l'expression de la force de pression $\overrightarrow{F_{\text{eau}}}$ exercée par l'eau dans le bassin sur la surface latérale située au point d'abscisse $x = a$ en fonction de h, a, g, μ, P_0 et d'un vecteur de la base cartésienne.

(4) En déduire l'expression de la hauteur d'eau maximale h_{max} à laquelle peut être remplie le bassin sans que les parois ne cèdent. Faire l'application numérique puis commenter le résultat.

(5) Proposer un moyen technique permettant de s'assurer que le niveau d'eau n'atteigne jamais h_{max}.

Pour la suite du problème, on note $h_0 = 1{,}5\,\text{m}$ la hauteur d'eau maximale atteignable dans le bassin.

II. Dispositif d'arrosage.

En l'absence de précipitation, le volume d'eau estimé pour arroser le potager est de $V_{\text{jour}} \approx 600\,\text{L}$.

L'arrosage d'un potager est assuré au moyen d'un tuyau cylindrique en PVC de diamètre $d = 1{,}0\,\text{cm}$ constant, circulant depuis le robinet (situé à une altitude z_{R} du fond du bac). Le tuyau atteint le sol et circule en faisant $N = 20$ serpentins faisant une longueur totale $L = 20\,\text{m}$ depuis le robinet jusqu'à l'extrémité du tuyau.

Le serpentin est percé de trous régulièrement espacés permettant l'arrosage de toute la superficie du terrain. Pour simplifier l'étude nous négligerons l'effet de ces trous et chercherons plutôt à étudier l'évolution de la pression de l'eau dans le serpentin. On fera donc l'hypothèse qu'au bout de la longueur L, le tuyau est ouvert à l'air libre.

Dans les parties II.1 et II.3, la hauteur d'eau dans le bassin est supposée maintenue à une altitude $h_0 = 1{,}5\,\text{m}$ grâce à un dispositif d'alimentation adéquat. Dans la partie II.2, on ne suppose plus que la hauteur est maintenue constante, mais qu'elle diminue progressivement au cours de l'arrosage.

II.1 Régime stationnaire et fluide parfait

On se place en régime stationnaire et on suppose le fluide parfait.

(7) Définir un fluide parfait.

On s'intéresse à une ligne de courant partant d'un point A la surface du bassin vers l'extrémité libre du tuyau (notée E). On note R le point au niveau du robinet, à la sortie du bassin.

(8) Rappeler la relation de Bernoulli, en précisant les hypothèses nécessaires à son application le long d'une ligne de courant.

(9) Exprimer la vitesse v_{E} des particules de fluide au niveau de l'extrémité libre du tuyau en fonction de g et $h_{\max}$. Faire l'application numérique.

(10) En déduire une expression de la vitesse v_{R} puis de la pression P_{R} du fluide au niveau du robinet. Comparer avec l'expression que donnerait la question **2** et commenter le résultat.

On suppose désormais que des trous sont percés régulièrement le long du tuyau à hauteur de $p = 5$ trous par serpentin, chacun d'ouverture de section s. L'extrémité du tuyau est supposée fermée.

(11) Dans le modèle utilisé, justifier que la vitesse des particules de fluide au niveau de chacun des trous est la même quelque soit la position du trou le long du tuyau. En déduire un lien entre s, p, N et d, puis la valeur de s.

(12) Évaluer alors la durée Δt_1 nécessaire pour arroser le potager (on rappelle que le volume d'eau total doit être $V_{\text{jour}} = 600\,\mathrm{L}$).

II.2 Variation de hauteur d'eau en absence d'alimentation.

En l'absence d'un dispositif d'alimentation fonctionnant pendant l'arrosage, les modèles précédents ne conviennent pas : une fois le robinet ouvert et en l'absence d'alimentation pendant la durée d'arrosage, le bassin voit sa hauteur d'eau diminuer. On note $h(t)$ la hauteur d'eau au cours du temps, telle que $h(0) = h_{\max}$. Le diamètre d du tuyau est supposé très inférieur au côté a du bassin. On considère à nouveau le fluide comme parfait et le tuyau ouvert à l'extrémité, sans trous.

(13) L'écoulement peut-il être encore considéré incompressible ? stationnaire ?

(14) En justifiant votre raisonnement, justifier que la vitesse $v_{\text{surf}}(t)$ des particules de fluide à la surface du du bassin est très inférieure à la vitesse de sortie du tuyau $v_{\mathrm{E}}(t)$.

L'écoulement est suffisamment lent pour admettre que la relation de Bernoulli reste encore valable.

(15) Montrer que dans ces conditions, l'évolution de la hauteur d'eau h dans le bassin peut se modéliser par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \alpha\sqrt{h} = 0$$

où on explicitera α en fonction de a, d et g.

(16) En déduire la durée Δt_2 nécessaire pour arroser le jardin en partant d'une hauteur d'eau $h_{\max}$. On rappelle que le volume nécessaire à l'arrosage est $V_{\text{jour}} = 600\,\mathrm{L}$. Comparer au résultat de la question **(12)**.

II.3 Pertes de charge.

On suppose à nouveau dans cette partie que la hauteur d'eau est maintenue constante dans le bassin.

On ne suppose plus dans cette question le fluide parfait. On donne la viscosité de l'eau $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pl}$. On néglige la présence des trous dans le serpentin pour cette partie.

(17) En utilisant les relations et le diagramme de Moody en annexe, estimer la perte de charge totale (régulière et singulières) Δp_{tot} liée à l'écoulement dans le tuyau, en supposant que la vitesse dans le tuyau vaut $v \approx 5{,}4\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

(18) Justifier alors que le modèle du fluide parfait n'est pas très approprié pour étudier le problème d'alimentation et qu'une pompe est de fait nécessaire pour conserver un débit suffisant dans le tuyau.

(19) Estimer la puissance indiquée nécessaire de cette pompe pour maintenir le débit souhaité (vitesse débitante de $5{,}4\,\mathrm{m.s^{-1}}$.) Commenter.

Donnees

Nombre de Reynolds d'un écoulement

On définit un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds comme :

$$Re = \frac{UL\rho}{\eta}$$

avec η la viscosité dynamique du fluide, ρ la masse volumique du fluide, L la taille caractéristique de l'obstacle, U la vitesse caractéristique de l'écoulement.

Perte de charge régulière

Perte de charge régulière dans une conduite.			◊◊◊
	Symbole	**Unité**	**Signification**
$\Delta p_{\text{ch}} = \frac{1}{2}\rho V^2 \lambda \frac{L}{d}$	Δp_{ch}	Pa	Perte de charge régulière
	d	m	Diamètre de la conduite
	L	m	Longueur de la conduite
	V	m.s^{-1}	Vitesse caractéristique de l'écoulement
	ρ	kg.m^{-3}	Masse volumique du fluide
	λ	/	Coefficient de perte de charge

Les valeurs de λ sont obtenues par des expériences, dont les résultats sont résumés dans le diagramme de Moody ci-dessous.

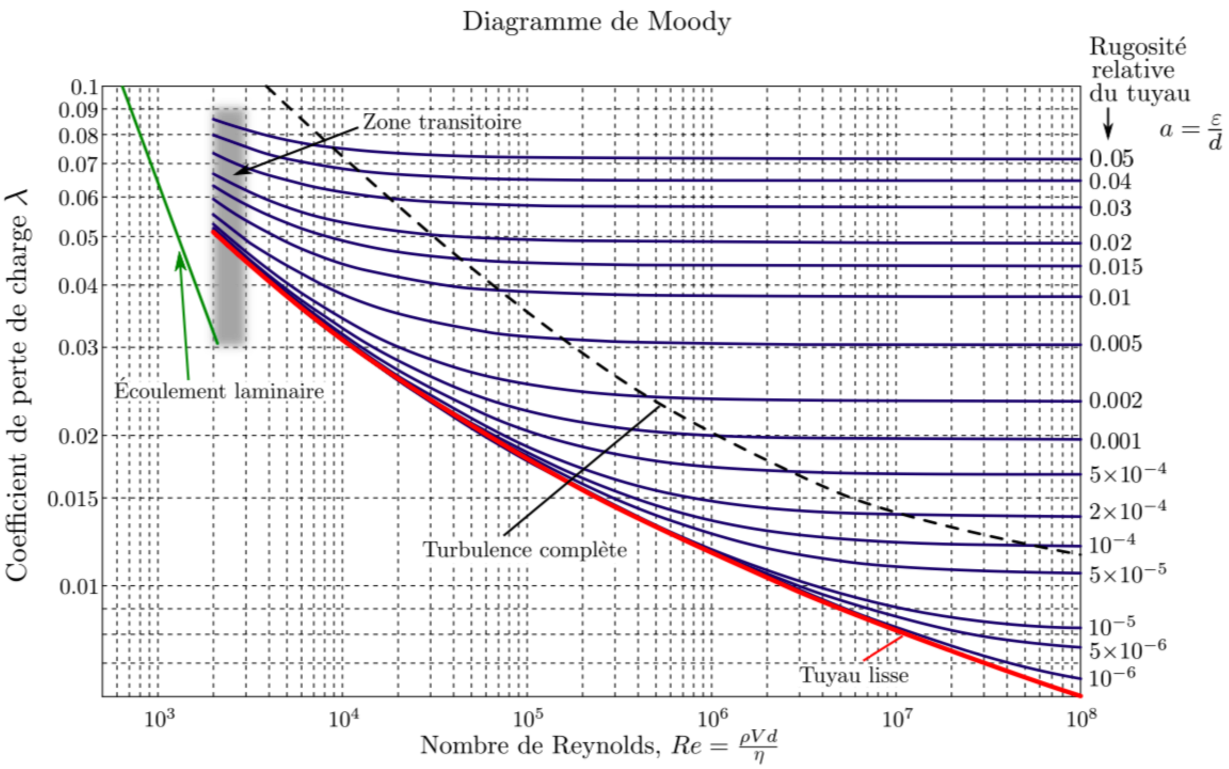


Figure **2** – Diagramme de Moody donnant le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds pour différentes rugosités de canalisation. .

La rugosité ε du tuyau correspond à la hauteur moyenne des aspérités présentes dans le tuyau.

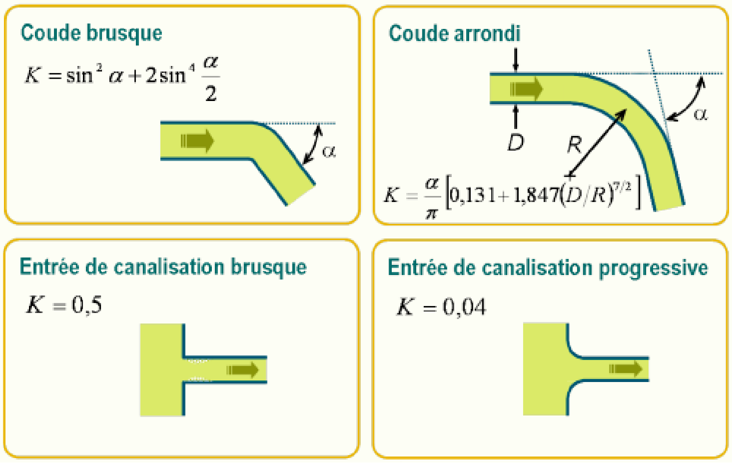
Quelques valeurs de rugosité usuelles sont données dans le tableau ci-dessous :

Rugosité moyenne ε (mm)			
Tube en laiton neuf	0,002	Tube en acier neuf	0,05
Tube en PVC neuf	0,01	Tube en fonte neuf	0,25

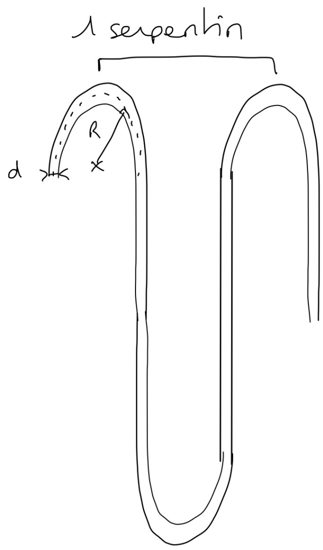
Perte de charges singulières

Perte de charge singulière.			♦◊◊
	Symbole	**Unité**	**Signification**
$\Delta p_{\text{ch}} = \frac{1}{2}\rho V^2 K$	Δp_{ch}	Pa	Perte de charge singulière
	V	m.s^{-1}	Vitesse moyenne de l'écoulement
	ρ	kg.m^{-3}	Masse volumique du fluide
	K	/	Coefficient de perte de charge singulière

Exemples de coefficients de perte de charge singulière :



Description du serpentin



Diamètre du tuyau $d = 2{,}0\,\text{cm}$, rayon de courbure $R = 10\,\text{cm}$."