Modèle d'un être humain.

Sujet de révision n°3 [Durée : 1h30]

Outils : Bilans thermiques. Résistance thermique.

Une boite isolante de côté a est constitué d'une épaisseur $e \ll a$ de matériau dont la conductivité est λ. L'intérieur de la boite est composé d'un liquide à la température supposée uniforme $T_1(t)$ et toutes les faces extérieures sont supposées être en contact avec l'air extérieur à la température T_2. On note μ la masse volumique du matériau et c sa capacité massique.

Le contact avec l'air extérieur peut être modélisé par un transfert conducto-convectif : la puissance surfacique cédée depuis la surface extérieure de la boite de température T_{surface} vers l'air de température T_2 est donnée par

$$\Phi_{\text{surf}} = h(T_{\text{surface}} - T_2)$$

avec $h = 10\,\text{S.I.}$ en l'absence de vent, et $h = 100\,\text{S.I.}$ en présence d'un fort vent.

1. Questions préliminaires

(1) Rappeler les trois moyens de transmission d'énergie thermique en donnant un exemple pour chacun d'entre eux.

(2) Quelle est l'unité S.I. de la conductivité thermique ? du coefficient h ?

2. Équation de diffusion thermique dans une paroi.

On s'intéresse à une unique paroi de la boîte dans les questions suivantes. Le champ de température $T(x,t)$ est supposé ne dépendre que du temps t et de la coordonnée x dans le sens de l'épaisseur du matériau.

(3) Faire un schéma de cette paroi et placer une base cartésienne pour l'étude. On prendra $x = 0$ au niveau de l'intérieur de la boîte, et $x = e$ au niveau de l'extérieur de la boîte.

(4) Rappeler la loi de Fourier dans le cas général, puis donner l'expression du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j}_{\text{th}}$ en fonction du champ de température $T(x,t)$.

(5) On considère la tranche de paroi comprise entre l'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$.

- **(a)** Exprimer l'énergie thermique algébrique entrante dans le système pendant une durée $\mathrm{d}t$ en fonction de λ et $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$?
- **(b)** Appliquer le premier principe de la thermodynamique à ce système pour conclure et retrouver l'équation différentielle sur la température, appelée équation de diffusion.

3. Régime stationnaire.

On suppose dans ces questions la température T_1 stationnaire dans le liquide de la boîte.

(6) Justifier que dans ce cadre, le flux thermique traversant une paroi ne dépend pas de la coordonnée x.

(7) Exprimer ce flux thermique en fonction de h, a, e, T_1, T_2 et λ.

(8) Rappeler la définition d'une résistance thermique, puis déterminer l'expression de la résistance thermique totale de la paroi (en tenant compte de la conduction et de la conducto-convection).

(9) Exprimer la résistance thermique $R_{\text{th,tot}}$ des parois de la boîte dans le cas stationnaire.

4. Régime quasi-stationnaire.

On ne suppose plus que la température T_1 soit constante dans la boîte, mais on admet que la relation trouvée précédemment reste valable avec $T_1(t)$.

À l'instant initial, on note $T_1(t=0) = T_{1,0}$. On notera c_{liq} la capacité massique du liquide dans la boîte. On notera ρ la masse volumique du liquide présent dans la boîte.

(10) En l'absence d'un dispositif de chauffage dans la boîte, déterminer l'équation différentielle sur la température $T_1(t)$ dans la boîte.

(11) Donner l'expression du temps caractéristique τ de décroissance en fonction de $\rho, a, c_{\text{liq}}, R_{\text{th,tot}}$. Donner l'allure de $T_1(t)$.

(12) Quelle puissance donner à un dispositif de chauffage interne pour que le liquide de la boîte soit maintenu à $T_{1,0}$?

(13) Estimer cette puissance en présence et en absence de vent pour une boîte modélisant un être au sang chaud (environ 38°C) de taille voisine d'un être humain, assimilé à un réservoir d'eau entouré de peau de conductivité $\lambda = 0{,}6\,\text{S.I.}$.

(14) Proposer un circuit électrique modélisant l'équation thermique sur $T_1(t)$ de la question **(11)**.