Mécanique

Frappe d'un punching-ball.

Sujet de révision n°2 [Durée : 1h]

Outils : Coordonnées cylindriques. Moment de force, moment cinétique, couple. Énergie cinétique de rotation. Travail. Portrait de phase.

Un punching-ball (littéralement sac à frapper) peut se présenter sous deux formes : les sacs lourds, suspendus au plafond en forme de cylindre nécessitant des coups puissants pour être mis en mouvement, ou une sphère lestée en haut d'un pied flexible, qui sert en général plutôt à faire progresser la rapidité des coups du boxeur.

On s'intéresse dans cet exercice au mouvement du deuxième type de sac de frappe, dont un exemple est donné en figure **1** ci-contre. On notera O le point de liaison entre la tige et le socle. Les caractéristiques techniques de ce sac sont détaillées dans le tableau ci-dessous):

Longueur L de la tige	120 cm
Masse m de la tige	2 kg
Masse M du sac	10 kg
Rayon r du sac (modélisé par une sphère)	10 cm
Moment d'inertie J par rapport à tout axe de rotation passant par O	15,5 kg.m^2

Figure **1** – Sac de Frappe, image : www.decathlon.fr

Le socle est bien lesté : on le supposera immobile. La liaison entre le socle et la tige s'apparente à une liaison de type rotule, mais nous ferons l'hypothèse d'un mouvement plan. On notera $\overrightarrow{e_z}$ un vecteur unitaire orthogonal au plan dans lequel a lieu le mouvement.
Cette liaison est effectuée au moyen d'un ressort de forte raideur dont on modélisera l'action sur la tige par un couple de rappel $\overrightarrow{\Gamma}$ par rapport au point de liaison O. Si le punching-ball tourne d'un angle θ (compté dans le sens direct par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_z})$ par rapport à la verticale :

$$\overrightarrow{\Gamma} = -C\theta\overrightarrow{e_z}$$

On modélisera le punching-ball par un pendule pesant. Le centre de gravité G est pris au niveau du haut de la tige, de sorte que $OG = L$.

Un boxeur frappe le punching-ball, initialement à la verticale, à l'instant $t = 0$, lui communiquant une énergie cinétique E_0. On étudie ensuite la rotation du punching-ball autour du point O en relevant l'angle θ que fait le punching-ball avec la verticale.

(1) Faire un schéma du problème quand le punching-ball fait un angle θ avec la verticale. Positionner le vecteur $\overrightarrow{e_z}$, et les vecteurs de la base cylindrique directe.

(2) Exprimer le moment cinétique du punching-ball par rapport à l'axe de rotation $(O,\overrightarrow{e_z})$ en fonction de J et de θ ou de ses dérivées.

(3) Quelle est l'unité de C ?

(4) On néglige tout frottement. Établir l'équation différentielle sur le mouvement du punching-ball sous la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega_1^2 \sin\theta$$

où on précisera l'expression de ω_0 et ω_1.

(5) On suppose se placer aux petits angles. Quelle valeur minimale donner au coefficient de rappel C pour que le punching-ball tende à revenir dans son état initial ?

Pour la suite on prendra $C = 1{,}0 \cdot 10^3$ S.I.

(6) Pour de petits angles, quelle est la période d'oscillation du punching-ball ?

On cherche maintenant à évaluer les conditions initiales données au mouvement.

(7) En justifiant, donner une expression de θ et de $\dot{\theta}$ à l'instant initial en fonction de E_0 et d'une ou plusieurs des caractéristiques du punching-ball.

(8) Proposer un modèle de frappe permettant d'évaluer numériquement l'énergie cinétique fournie au punching-ball par le boxeur. Faire l'application numérique de $\dot{\theta}$ initial.

On a donné en page suivante trois portraits de phase modélisant le mouvement du punching-ball à l'aide du logiciel Python, où on a seulement changé la valeur initiale de $\dot{\theta}$, respectivement à 1 rad/s, 10 rad/s et 30 rad/s.

(9) En vous basant sur la figure **2**, justifier que des frottements ont été pris en compte dans la modélisation. On suppose que ce modèle de frottement équivaut à un couple supplémentaire de la forme $\Gamma_{\text{frott}} = -\lambda\dot{\theta}$ par rapport à l'axe de rotation. Proposer une méthode graphique permettant d'évaluer λ.

(10) Dans la figure **4**, justifier la forme du portrait de phase obtenu. Quel phénomène physique a-t-on modélisé ?

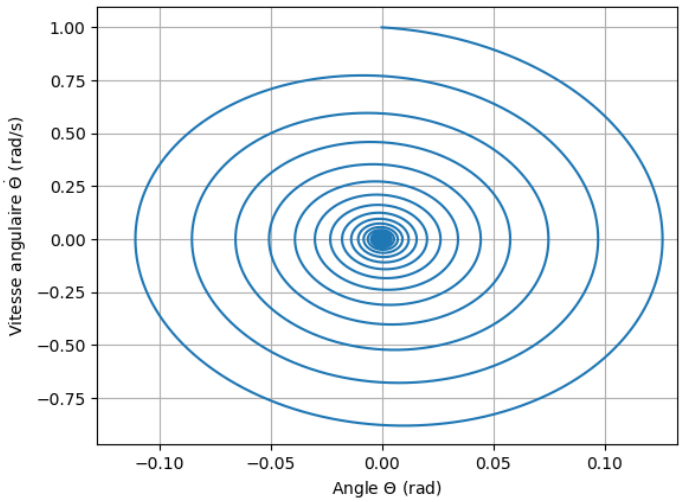

Figure **2** – Portrait de phase (simulé) du mouvement du punching-ball avec $\dot{\theta}_{ini} = 1$ rad.s^{-1}.

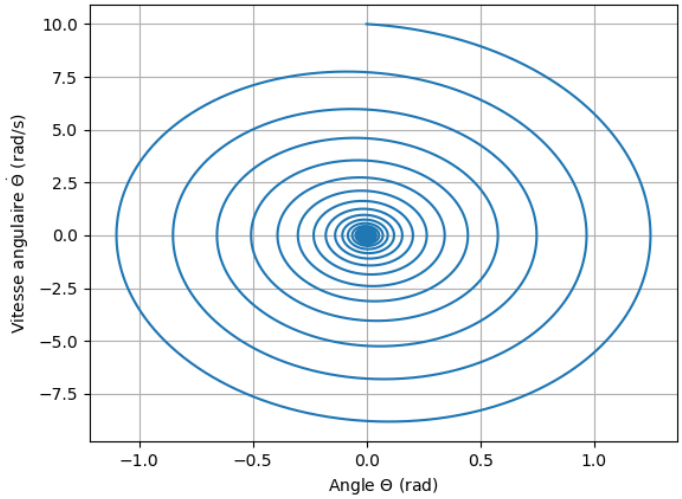

Figure **3** – Portrait de phase (simulé) du mouvement du punching-ball avec $\dot{\theta}_{ini} = 10$ rad.s^{-1}.

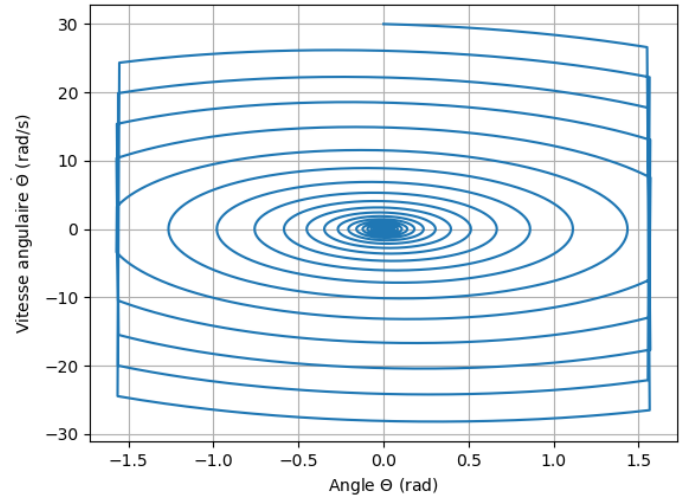

Figure **4** – Portrait de phase (simulé) du mouvement du punching-ball avec $\dot{\theta}_{ini} = 30$ rad.s^{-1}.